Cours 5
ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES (ACP)

Master 2 – 2007/2008

1. Les données

NOMS	PUISS	CYLI	CoupleMaxi	LONG	LARG	HAUT	COFFRE	RESE	POIDS	VITE	CONS
ALF 147 1,9 JTD Distinctive	115	1910	28	4,17	1,73	1,44	280	60	1270	191	5,8
ALF 166 2,5 V6 24V Progression	188	2492	22,5	4,72	1,81	1,42	490	72	1490	225	11,9
ASTMAR DB7 Volante	420	5935	55	4,66	1,83	1,26	150	89	1875	265	14
AUD A4 3,0 Quattro Pack	220	2976	30,6	4,55	1,77	1,43	445	66	1515	243	10,5
AUD A8 S8 Pack Avus	360	4172	43,9	5,03	1,88	1,44	525	90	1750	250	14
AUD TT Roadster 1,8 T225 Quattro	225	1781	28,5	4,04	1,76	1,34	270	55	1395	243	9,2
AUDIA4 Cabriolet 2,4	170	2393	23,4	4,57	1,78	1,39	315	70	1600	224	9,7
BEN Continental T	426	6750	88,2	5,22	1,95	1,45	350	100	2450	245	18,7
BMW 316i	115	1796	17,8	4,47	1,74	1,41	440	63	1310	206	7,1
BMW X5 3,0d Pack Luxe	183	2926	41,8	4,67	1,87	1,71	465	93	2085	200	9,7
BMW Z8	400	4941	51	4,4	1,83	1,32	203	73	1585	250	14,5
CAD Seville STS	305	4565	40,8	4,99	1,9	1,43	445	70	1857	241	14,1
CHR Grand Voyager 2,5 CRD Limited	140	2500	31,8	5,09	2	1,75	580	75	2000	185	7,7
CHR PT Cruiser 2,0 Classic	140	1995	19	4,29	1,7	1,6	520	57	1412	170	7,8
CIT Berlingo 1,6i 16V SX	110	1587	15,3	4,11	1,72	1,8	664	55	1252	172	7,4
CIT C3 1,4 HDI 70 ch SXPack Clim	70	1398	15,3	3,85	1,67	1,52	305	45	1022	165	4,2
CIT Picasso 1,6i SX	90	1587	14	4,28	1,75	1,64	515	55	1240	168	7,8
CIT Saxo 1,1i Bic 2	60	1124	9,1	3,72	1,59	1,37	280	45	805	162	6,7
CIT Xsara 2,0 Hdi 110 ch Exclusive	110	1997	26	4,19	1,7	1,4	408	54	1210	191	5,2
DAE Leganza 2,0 CDX	133	1998	18,8	4,67	1,78	1,44	560	65	1433	206	9,2
DAI Sirion 1,3x	102	1298	12,2	3,67	1,59	1,45	235	40	850	180	5,7
FIA Multipla JTD 115 ELX	115	1910	20,7	3,99	1,87	1,67	430	63	1370	176	6,4
FIA Seicento S	55	1108	8,9	3,32	1,51	1,44	170	35	750	150	5,8
FIA Stilo 1,9 JTD 80 ch Active	80	1910	20	4,25	1,76	1,52	335	58	1305	170	5,5
FOR Fiesta 1,4 TDCi Ghia	68	1398	16,3	3,92	1,68	1,42	284	45	1065	164	4,3
FOR Focus ST 170	172	1989	20	4,17	1,7	1,43	350	55	1283	216	9,1
FOR Ka 1,3 Original	60	1299	10,7	3,62	1,63	1,37	185	42	890	155	6,3
FOR Mondeo 2,0 DTCi 130 ch Ghia	130	1998	33,7	4,73	1,81	1,43	500	56	1501	200	5,9
FOR Puma 1,6	103	1596	14,8	3,98	1,67	1,34	240	42	1035	190	7,3
HON Accord 2,3iES	152	2254	21	4,59	1,75	1,43	427	65	1423	212	8,7

+ encore 63 modèles de voitures

NOMS
ALF 147 1,9 JTD Distinctive
ALF 166 2,5 V6 24V Progression
ASTMAR DB7 Volante
AUD A4 3,0 Quattro Pack

2. Résumé des données

Sortie SPAD

STATISTIQUES SOMMAIRES DES VARIABLES CONTINUES
EFFECTIF TOTAL : 91 POIDS TOTAL : 91.00

NUM . IDEN - LIBELLE	EFFECTIF	POIDS	MOYENNE	ECART-TYPE	MINIMUM	MAXIMUM
1 . C2 - PUISS	91	91.00	147.81	90.78	45.00	476.00
2 . C3 - CYLI	91	91.00	2253.71	1103.69	599.00	6750.00
3 . C4 - CoupleMaxi	91	91.00	28.49	31.81	7.10	299.00
4 . C5 - LONG	91	91.00	4.33	0.47	2.50	5.39
5 . C6 - LARG	91	91.00	1.75	0.09	1.51	2.00
6 . C7 - HAUT	91	91.00	1.48	0.13	1.14	1.86
7 . C8 - COFFRE	91	91.00	379.26	144.16	110.00	900.00
8 . C9 - RESE	91	91.00	60.81	15.33	22.00	100.00
9 . C10 - POIDS	91	91.00	1382.49	380.01	680.00	2450.00
10 . C11 - VITE	91	91.00	195.69	30.66	135.00	305.00
11 . C12 - CONS	91	91.00	7.95	2.94	4.20	18.70
12 . C13 - PRIX	91	91.00	36117.64	48234.54	7290.00	342798.00

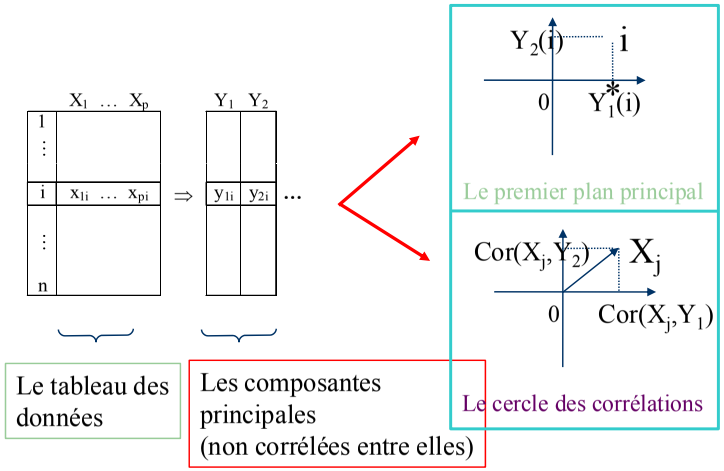
3. Tableau des corrélations

Correlations

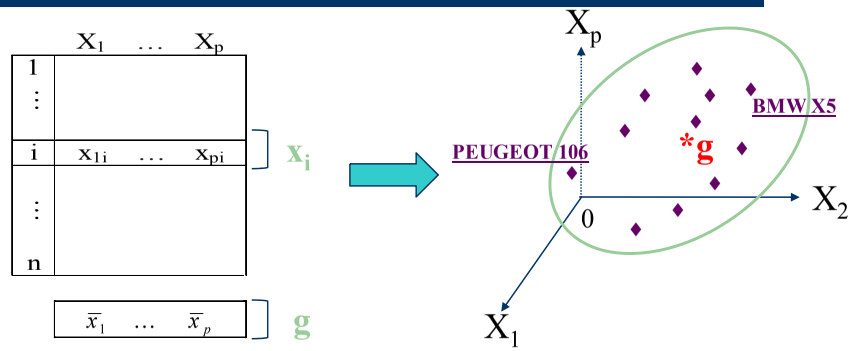
		PUISS	CYLI	CoupleMaxi	LONG	LARG	HAUT	COFFRE	RESE	POIDS	VITE	CONS	PRIX
PUISS	Pearson Correlation	1	,925**	,491**	,575**	,650**	-,108	,086	,702**	,714**	,852**	,869**	,795**
	Sig. (2-tailed)	.	,000	,000	,000	,000	,309	,416	,000	,000	,000	,000	,000
	N	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91
CYLI	Pearson Correlation	,925**	1	,467**	,679**	,732**	,024	,180	,796**	,824**	,724**	,867**	,873**
	Sig. (2-tailed)	,000	.	,000	,000	,000	,824	,088	,000	,000	,000	,000	,000
	N	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91
CoupleMaxi	Pearson Correlation	,491**	,467**	1	,411**	,404**	-,018	,104	,406**	,434**	,448**	,393**	,375**
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	.	,000	,000	,867	,328	,000	,000	,000	,000	,000
	N	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91
LONG	Pearson Correlation	,575**	,679**	,411**	1	,857**	,195	,835**	,863**	,846**	,621**	,526**	,507**
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000	.	,000	,065	,000	,000	,000	,000	,000	,000
	N	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91
LARG	Pearson Correlation	,650**	,732**	,404**	,857**	1	,333**	,520**	,898**	,895**	,592**	,633**	,575**
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000	,000	.	,001	,000	,000	,000	,000	,000	,000
	N	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91
HAUT	Pearson Correlation	-,108	,024	-,018	,195	,333**	1	,552**	,342**	,427**	-,294**	,058	-,055
	Sig. (2-tailed)	,309	,824	,867	,065	,001	.	,000	,001	,000	,005	,582	,608
	N	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91
COFFRE	Pearson Correlation	,086	,180	,104	,835**	,520**	,552**	1	,544**	,549**	,137	,104	,026
	Sig. (2-tailed)	,416	,088	,328	,000	,000	,000	.	,000	,000	,197	,326	,808
	N	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91
RESE	Pearson Correlation	,702**	,796**	,406**	,863**	,898**	,342**	,544**	1	,934**	,606**	,697**	,638**
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000	,000	,000	,001	,000	.	,000	,000	,000	,000
	N	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91
POIDS	Pearson Correlation	,714**	,824**	,434**	,846**	,895**	,427**	,549**	,934**	1	,583**	,706**	,655**
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	.	,000	,000	,000
	N	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91
VITE	Pearson Correlation	,852**	,724**	,448**	,621**	,592**	-,294**	,137	,606**	,583**	1	,639**	,554**
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000	,000	,000	,005	,197	,000	,000	.	,000	,000
	N	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91
CONS	Pearson Correlation	,869**	,867**	,393**	,526**	,633**	,058	,104	,697**	,706**	,639**	1	,798**
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000	,000	,000	,582	,326	,000	,000	,000	.	,000
	N	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91
PRIX	Pearson Correlation	,795**	,873**	,375**	,507**	,575**	-,055	,026	,638**	,655**	,554**	,798**	1
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000	,000	,000	,608	,808	,000	,000	,000	,000	.
	N	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

4. Visualisation des données



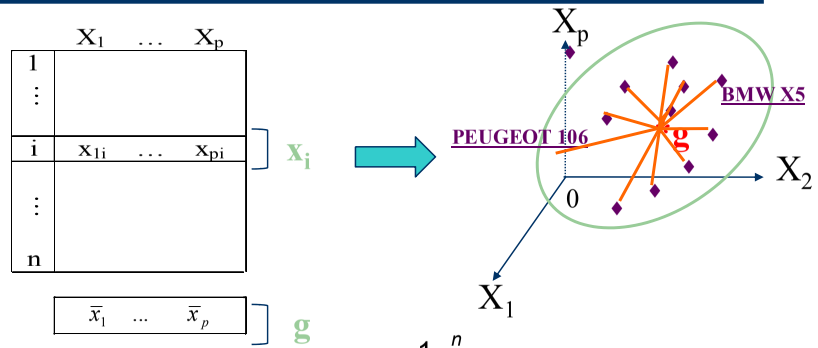
5. Le nuage de points associé aux données



N = {x_1, …, x_i, …, x_n} = Nuage de points associé aux données

Centre de gravité du nuage N : $g = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

6. Inertie totale du nuage de points



Inertie totale = $I(N, g) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2(x_i, g)$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(x_{ji}-\bar{x}_j)^2 = \sum_{j=1}^{p}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{ji}-\bar{x}_j)^2 = \sum_{j=1}^{p} s_j^2$$

7. Réduction des données

Pour neutraliser le problème des unités on remplace les données d'origine par les données centrées-réduites :

$$X_1^* = \frac{X_1 - \bar{x}_1}{s_1}$$

$$\vdots$$

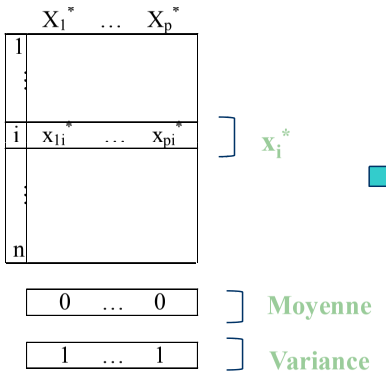
$$X_p^* = \frac{X_p - \bar{x}_p}{s_p}$$

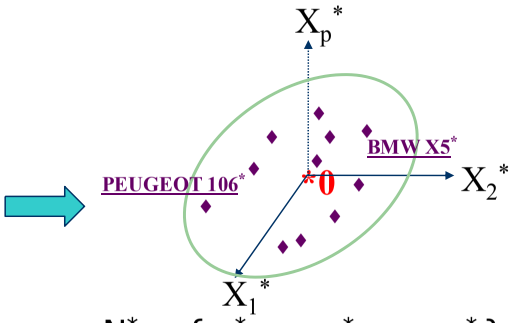
de moyenne 0 et d'écart-type 1.

Les données centrées-réduites

	1 PUI	2 CYL	3 oup	4 LON	5 LA	6 HA	7 OF	8 RES	9 POI	10 VIT	11 COI	12 PRI	13 CA	14 OR	15 Q
ALF 1	-0,	-0,	-0,	-0,	-0,	-0,	-0,	-0,	-0,	-0,	-0,	-0,	2	2	3
ALF 1	0,4	0,2	-0,	0,8	0,7	-0,	0,7	0,7	0,2	0,9	1,3	-0,	1	2	2
ASTM	2,9	3,3	0,8	0,7	0,9	-1,	-1,	1,8	1,2	2,2	2,0	2,2	1	2	4
AUD	0,7	0,6	0,0	0,4	0,2	-0,	0,4	0,3	0,3	1,5	0,8	0,0	1	2	3
AUD	2,3	1,7	0,4	1,4	1,4	-0,	1,0	1,8	0,9	1,7	2,0	1,2	1	2	3
AUD	0,8	-0,	0,0	-0,	0,	-1,	-0,	-0,	0,0	1,5	0,4	0,0	1	2	4
AUDIA	0,2	0,1	-0,	0,5	0,3	-0,	-0,	0,6	0,5	0,9	0,5	0,0	1	2	2
BENC	3,0	4,0	1,8	1,8	2,2	-0,	-0,	2,5	2,7	1,6	3,6	6,3	1	2	3
BMW	-0,	-0,	-0,	0,3	-0,	-0,	0,4	0,1	-0,	0,3	-0,	-0,	1	2	1
BMW	0,3	0,6	0,4	0,7	1,3	1,8	0,5	2,0	1,8	0,1	0,5	0,2	2	2	3
BMW	2,7	2,4	0,7	0,1	0,9	-1,	-1,	0,7	0,5	1,7	2,2	1,9	1	2	4
CAD	1,7	2,0	0,3	1,4	1,6	-0,	0,4	0,6	1,2	1,4	2,0	0,6	1	3	3
CHR	-0,	0,2	0,1	1,6	2,7	2,1	1,3	0,9	1,6	-0,	-0,	0,1	2	3	3
CHR	-0,	-0,	-0,	-0,	-0,	0,9	0,9	-0,	0,0	-0,	-0,	-0,	1	3	2
CIT Be	-0,	-0,	-0,	-0,	-0,	2,5	1,9	-0,	-0,	-0,	-0,	-0,	1	1	2
CIT C3	-0,	-0,	-0,	-1,	-0,	0,3	-0,	-1,	-0,	-1,	-1,	-0,	2	1	2
CIT Pi	-0,	-0,	-0,	-0,	0,0	1,2	0,9	-0,	-0,	-0,	-0,	-0,	1	1	1
CIT Sa	-0,	-1,	-0,	-1,	-1,	-0,	-0,	-1,	-1,	-1,	-0,	-0,	1	1	1
CIT X	-0,	-0,	-0,	-0,	-0,	-0,	0,2	-0,	-0,	-0,	-0,	-0,	2	1	3

8. Le nuage de points associé aux données réduites



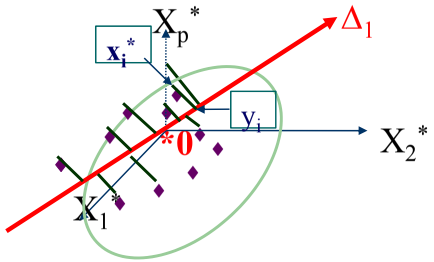


$N^* = \{x_1^*, \ldots, x_i^*, \ldots, x_n^*\}$

Centre de gravité : $g^* = 0$

Inertie totale : $I(N^*, 0) = p$

9. Premier axe principal Δ_1

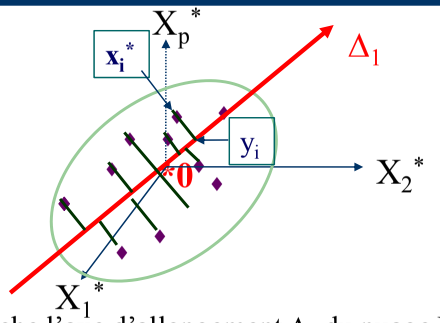


Objectif 1 : On cherche l'axe Δ_1 passant le mieux possible au milieu du nuage N^*.

On cherche à minimiser l'inertie du nuage N^* par rapport à l'axe Δ_1 :

$$I(N, \Delta_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2(x_i, y_i)$$

Premier axe principal Δ_1 (suite)

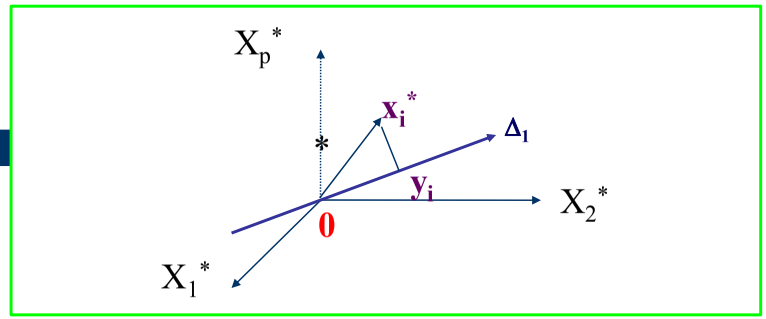


Objectif 2 : On cherche l'axe d'allongement Δ_1 du nuage N^*.

On cherche à maximiser l'inertie du nuage N^* projeté sur l'axe Δ_1 :

$$I(\{y_1, \ldots, y_n\}, 0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2(y_i, 0)$$

Les objectifs 1 et 2 sont atteints simultanément



De :
on déduit :

$$d^2(x_i,0) = d^2(y_i,0) + d^2(x_i,y_i)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2(x_i,0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2(y_i,0) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2(x_i,y_i)$$

Inertie totale = p = Inertie expliquée par Δ_1 + Inertie résiduelle

Maximiser — Minimiser

1^{er} axe principal Δ_1 : Résultats

- L'axe Δ_1 passe par le centre de gravité 0 du nuage de points N^*.
- L'axe Δ_1 est engendré par le vecteur normé u_1, vecteur propre de la matrice des corrélations R associé à la plus grande valeur propre λ_1.
- L'inertie du nuage projeté est égal à λ_1.
- La part d'inertie expliquée par le premier axe principal Δ_1 est égale à λ_1/p.

Résultats SPAD

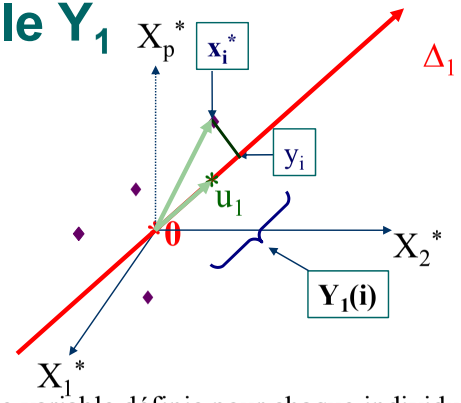
```
VALEURS PROPRES
APERCU DE LA PRECISION DES CALCULS : TRACE AVANT DIAGONALISATION ..  11.0000
                                     SOMME DES VALEURS PROPRES ....  11.0000
HISTOGRAMME DES 11 PREMIERES VALEURS PROPRES
+--------+-----------+----------+----------+-------------------------------------------
| NUMERO |   VALEUR  | POURCENT.| POURCENT.|
|        |   PROPRE  |          |  CUMULE  |
+--------+-----------+----------+----------+-------------------------------------------
|    1   |   6.6969  |   60.88  |   60.88  | *******************************************
|    2   |   2.0236  |   18.40  |   79.28  | ************************
|    3   |   0.7451  |    6.77  |   86.05  | *********
|    4   |   0.6926  |    6.30  |   92.35  | *********
|    5   |   0.2839  |    2.58  |   94.93  | ****
|    6   |   0.2013  |    1.83  |   96.76  | ***
|    7   |   0.1300  |    1.18  |   97.94  | **
|    8   |   0.0893  |    0.81  |   98.75  | **
|    9   |   0.0757  |    0.69  |   99.44  | *
|   10   |   0.0385  |    0.35  |   99.79  | *
|   11   |   0.0230  |    0.21  |  100.00  | *
+--------+-----------+----------+----------+-------------------------------------------
```


Résultats SPAD

Direction du vecteur propre associé à la plus grande valeur propre :

```
-0.86
-0.91
-0.54
-0.87
-0.90
-0.21
-0.46
-0.94
-0.94
-0.76
-0.81
```

10. Première composante principale Y_1



Y_1 est une nouvelle variable définie pour chaque individu i par :

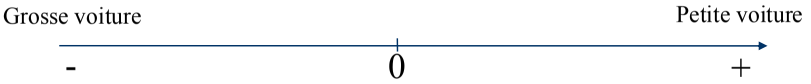
$Y_1(i)$ = coordonnée de y_i sur l'axe Δ_1

= produit scalaire entre les vecteurs x_i^* et u_1

= $\sum_{j=1}^{p} u_{1j} x_{ji}$ ⇒ $Y_1 = \sum_{j=1}^{p} u_{1j} X_j$

Interprétation de la première composante principale Y_1

Y_1= -0.86 PUISS
-0.91 CYLI
-0.54 Couplemaxi
-0.87 LONG
-0.90 LARG
-0.21 HAUT
-0.46 COFFRE
-0.94 RESE
-0.94 POIDS
-0.76 VITE
-0.81 CONS



Résultats SPAD

COORDONNEES DES INDIVIDUS
AXE 1

INDIVIDUS			COORDONNEES
IDENTIFICATEUR	P.REL	DISTO	
ALF 147 1,9 JTD Distinct	1.10	1.59	0.95
ALF 166 2,5 V6 24V Progr	1.10	5.61	-1.88
ASTMAR DB7 Volante	1.10	42.11	-4.92
AUD A4 3,0 Quattro Pack	1.10	5.09	-1.79
AUD A8 S8 Pack Avus	1.10	26.11	-4.86
AUD TT Roadster 1,8 T225	1.10	5.83	-0.22
AUDIA4 Cabriolet 2,4	1.10	3.11	-1.14
BEN Continental T	1.10	68.44	-7.76
BMW 316i	1.10	1.25	0.23
BMW X5 3,0d Pack Luxe	1.10	14.90	-3.06
BMW Z8	1.10	27.12	-3.68
CAD Seville STS	1.10	21.14	-4.26
CHR Grand Voyager 2,5 CR	1.10	20.40	-2.80

DISTO = $d^2(x_i^*, 0)$

Propriétés de la première composante principale Y_1

- Moyenne de Y_1 = 0
- Variance de Y_1 = $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_1(i)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2(y_i, 0) = \lambda_1$
- Cor(X_j, Y_1) = $\sqrt{\lambda_1} u_{1j}$
- $\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} cor^2(X_j, Y_1) = \frac{\lambda_1}{p}$ est maximum

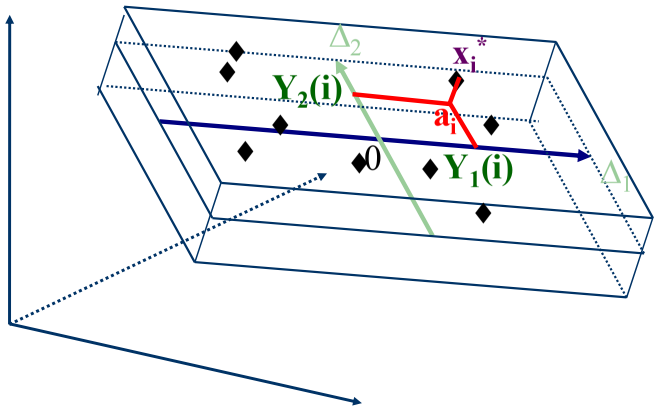
Qualité de la première composante principale Y_1

- Inertie totale = 11
- Inertie expliquée par le premier axe principal = λ_1 = 6.69
- Part d'inertie expliquée par le premier axe principal :

$$\frac{\lambda_1}{p} = \frac{6.69}{11} = 60.88$$

- La première composante principale explique 60.88 % de la variance totale.

11. Deuxième axe principal Δ_2



2ème axe principal Δ_2 : Résultats

- On recherche le deuxième axe principal Δ_2 orthogonal à Δ_1 et passant le mieux possible au milieu du nuage.
- Il passe par le centre de gravité 0 du nuage de points et est engendré par le vecteur normé u_2, vecteur propre de la matrice des corrélations R associé à la deuxième plus grande valeur propre λ_2.
- La deuxième composante principale Y_2 est définie par projection des points sur le deuxième axe principal.
- La deuxième composante principale Y_2 est centrée, de variance λ_2, et non corrélée à la première composante principale Y_1.

Résultats SPAD

COORDONNEES DES VARIABLES SUR LES AXES 1 A 5
VARIABLES ACTIVES

VARIABLES	COORDONNEES					CORRELATIONS VARIABLE-FACTEUR				
IDEN - LIBELLE COURT	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
C2 - PUISS	-0.86	0.43	-0.15	-0.01	0.15	-0.86	0.43	-0.15	-0.01	0.15
C3 - CYLI	-0.91	0.26	-0.20	-0.04	-0.01	-0.91	0.26	-0.20	-0.04	-0.01
C4 - CoupleMaxi	-0.54	0.22	0.53	-0.61	0.02	-0.54	0.22	0.53	-0.61	0.02
C5 - LONG	-0.87	-0.23	0.26	0.23	-0.15	-0.87	-0.23	0.26	0.23	-0.15
C6 - LARG	-0.90	-0.22	0.02	0.06	-0.25	-0.90	-0.22	0.02	0.06	-0.25
C7 - HAUT	-0.21	-0.83	-0.30	-0.35	0.08	-0.21	-0.83	-0.30	-0.35	0.08
C8 - COFFRE	-0.46	-0.73	0.26	0.21	0.33	-0.46	-0.73	0.26	0.21	0.33
C9 - RESE	-0.94	-0.20	-0.04	0.05	-0.12	-0.94	-0.20	-0.04	0.05	-0.12
C10 - POIDS	-0.94	-0.23	-0.09	-0.05	-0.07	-0.94	-0.23	-0.09	-0.05	-0.07
C11 - VITE	-0.76	0.45	0.18	0.26	0.16	-0.76	0.45	0.18	0.26	0.16
C12 - CONS	-0.81	0.29	-0.37	-0.12	0.13	-0.81	0.29	-0.37	-0.12	0.13

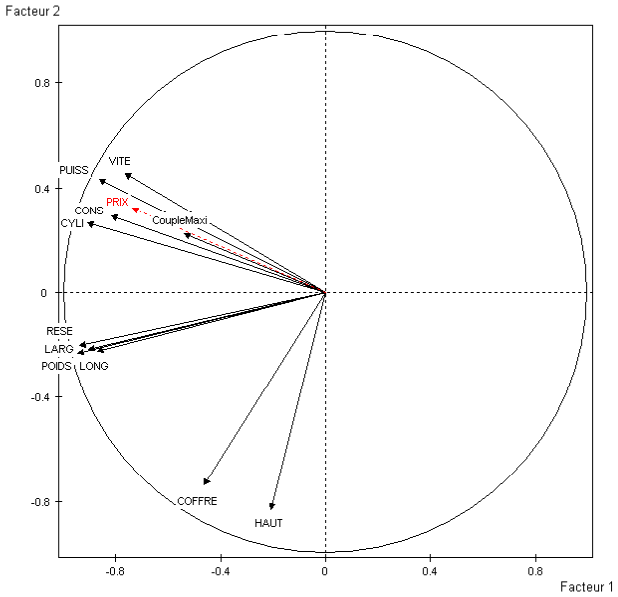
Interprétation de la deuxième composante principale Y_2

Y_2= 0.43 PUISS
+0.26 CYLI
+0.22 Couplemaxi
-0.23 LONG
-0.22 LARG
-0.83 HAUT
-0.73 COFFRE
-0.20 RESE
-0.23 POIDS
+0.45 VITE
+0.29 CONS

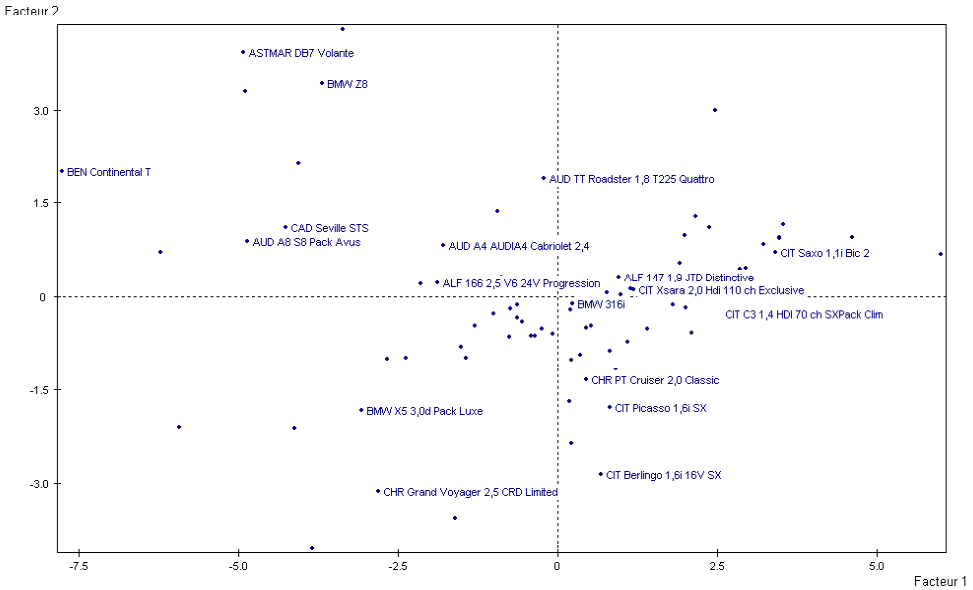
Voiture familiale — Voiture sportive

- 0 +

Le cercle des corrélations



12. Exemple Auto 2002
Le premier plan principal



13. Qualité globale de l'analyse

Inertie totale = variance totale $= p$

Part de variance expliquée par
la première composante principale $= \frac{\lambda_1}{p}$

Part de variance expliquée par
la deuxième composante principale $= \frac{\lambda_2}{p}$

Part de variance expliquée par
les deux premières composantes principales $= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{p}$

Et ainsi de suite pour les autres dimensions...