Statistique : étude de cas. Tests paramétriques.

Myriam Maumy-Bertrand

IRMA, UMR 7501, Université de Strasbourg

Vendredi 20 octobre 2017

« Lorsque vous avez éliminé l'impossible, ce qui reste, si improbable soit-il, est nécessairement la vérité ».

De Arthur Conan Doyle, D'après « Le signe des Quatre ».

Ce chapitre s'appuie essentiellement sur le livre :

Sommaire

Définition

Un test est un mécanisme qui permet de trancher entre deux hypothèses à la vue des résultats d'un échantillon, en quantifiant le risque associé à la décision prise.

Les deux hypothèses

Soient $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ deux hypothèses, dont une et une seule est vraie.

$\mathcal{H}_0$ joue le plus souvent un rôle prédominant par rapport à $\mathcal{H}_1$.

En effet $\mathcal{H}_0$ est l'**hypothèse de référence** alors que $\mathcal{H}_1$ est l'**hypothèse alternative**.

Exemple d'hypothèses

Vous pouvez avoir comme hypothèse nulle :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \text{La moyenne de la population est égale à } \mu_0}$$

et, dans ce cas, une hypothèse alternative **pourrait être**

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{La moyenne de la population est différente de } \mu_0}$$

ou encore

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{La moyenne de la population est strictement plus grande que } \mu_0.}$$

Exemple d'hypothèses (suite)

Une manière condensée d'écrire ces hypothèses est :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \mu \neq \mu_0.}$$

et

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0.}$$

Décision

La décision d'un test consiste à choisir entre $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$.

Risques

Il y a donc quatre cas possibles qui sont détaillés dans le tableau ci-dessous :

	$\mathcal{H}_0$ vraie	$\mathcal{H}_1$ vraie
$\mathcal{H}_0$ décidée	$1-\alpha$	β
$\mathcal{H}_1$ décidée	α	$1-\beta$

où α **et** β **sont les risques d'erreur de première et de deuxième espèce.**

Définition

L'**erreur de première espèce** est le fait de décider que l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ est vraie alors qu'en fait, en réalité, c'est l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ qui est vraie.
Le **risque d'erreur** associé à cette décision est noté généralement α.
Il s'agit donc de la probabilité de décider **à tort** que l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ est vraie.

Définition

L'**erreur de deuxième espèce** est le fait de décider que l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ est vraie alors qu'en fait, en réalité, c'est l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ qui est vraie.
Le **risque d'erreur** associé à cette décision est noté généralement β.
Il s'agit donc de la probabilité de décider **à tort** que l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ est vraie.

Lien entre les risques

La situation idéale serait que ces deux erreurs soient nulles mais ce n'est pas possible.

Pire encore, toutes autres choses étant fixées, ces deux erreurs sont **antagonistes :**

si vous diminuez α alors β augmente et inversement si vous diminuez β alors α augmente.

Remarque

Nous dissymétrisons alors le problème en tenant compte du fait que dans la pratique l'une des erreurs est plus grave que l'autre. L'erreur de première espèce sera choisie comme étant la plus grave. Nous prendrons donc un risque α très petit puis nous minimiserons β. En conclusion, nous choisissons comme hypothèse $\mathcal{H}_0$ celle dont le rejet entraîne les conséquences les plus graves.

Exemple

Un homme accusé d'un délit comparaît devant un juge. Cet homme est soit innocent ($\mathcal{H}_0$ vraie) soit coupable ($\mathcal{H}_1$ vraie). Le juge a le choix entre deux décisions : il accepte l'innocence ($\mathcal{H}_0$) ou il accepte la culpabilité ($\mathcal{H}_1$). L'innocence est l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ parce que son rejet entraîne les conséquences les plus graves :

1. Si le juge accepte l'innocence alors que l'homme est innocent : c'est parfait.
2. Si le juge accepte la culpabilité (rejette l'innocence) alors que l'homme est innocent est une erreur grave : il condamne un innocent.

Suite et fin de l'exemple

3. Si le juge accepte la culpabilité alors que l'homme est coupable : c'est parfait.
4. Si le juge accepte l'innocence alors que l'homme est coupable est une erreur moins grave que la précédente : il est plus grave de condamner un innocent que de gracier un coupable.

Niveau de significativité

Depuis les travaux de Neyman et Pearson, l'erreur de première espèce est limitée à un niveau dit **niveau de significativité**.

Le fait d'imposer α faible conduit à une règle de décision plus stricte.

En effet, dans ce cas, la décision consiste à abandonner $\mathcal{H}_0$ dans des cas rarissimes, et à conserver, plus souvent, à tort $\mathcal{H}_0$.

Niveaux usuels

Les valeurs les plus courantes pour α sont 10%, 5% ou 1%.

Définition

La **puissance d'un test** est égale à $1 - \beta$ ou encore la puissance est la probabilité de rejeter $\mathcal{H}_0$ à raison.

À retenir

Généralement la puissance doit au moins être égale à **0,80** pour être considérée comme satisfaisante.

Remarque

Le calcul de la puissance d'un test est généralement assez complexe : il faut souvent faire appel à une des fonctions ou à des logiciels spécialisés.

Les packages sous R pour calculer les puissances

1. Vous trouverez `power.t.test` et `power.prop.test` dans le package `stats`, installé de base dans R.
2. En installant le package `pwr`, vous trouverez alors `pwr.norm.test`, `pwr.r.test`, `pwr.chisq.test` et `pwr.anova.test`.
3. Vous trouverez également dans ce package `pwr.t2n.test` qui travaille sur deux échantillons de taille différente, ce que ne fait pas `power.t.test`.

Introduction

Avant d'appliquer tout test statistique, il s'agit de bien définir le problème posé.

En effet, selon les hypothèses formulées, vous appliquerez soit un **test bilatéral**, soit un **test unilatéral**.

Définition

Un **test bilatéral** s'applique quand vous cherchez une différence entre deux paramètres, ou entre un paramètre et une valeur donnée sans se préoccuper du signe ou du sens de la différence.

Dans ce cas, la zone de rejet de l'hypothèse principale se fait de part et d'autre de la distribution de référence.

Définition

Un **test unilatéral** s'applique quand vous cherchez à savoir si un paramètre est supérieur (ou inférieur) à un autre ou à une valeur donnée.

La zone de rejet de l'hypothèse principale est située d'un seul côté de la distribution de probabilité de référence.

Exemples de test

Certains tests comme les tests du Khi-carré ou le test de Fisher dans une analyse de la variance sont pratiquement toujours unilatéraux.

Sommaire

Statistique de test

Le risque d'erreur de première espèce α étant fixé, il faut choisir une **variable de décision** encore appelée **statistique de test**.

Cette variable est construite afin d'apporter de l'information sur le problème posé, à savoir le choix entre les deux hypothèses.

Sa loi doit être parfaitement déterminée dans au moins une des deux hypothèses (le plus souvent dans $\mathcal{H}_0$) afin de ne pas introduire de nouvelles inconnues dans le problème.

Définition

La **région critique** notée W (W pour wrong), ou encore appelée **zone de rejet** est égale à l'ensemble des valeurs de la variable de décision qui conduisent à écarter $\mathcal{H}_0$ au profit de $\mathcal{H}_1$.

La **région critique** correspond donc aux intervalles dans lesquels les différences sont trop grandes pour être le fruit du hasard d'échantillonnage.

Remarque

Dans la plupart des situations que vous rencontrerez dans la suite, la région critique W peut être reliée au risque d'erreur de première espèce α par $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}[W] = \alpha$.

Définition

La **région d'acceptation** notée $\overline{W}$, ou encore appelée **zone d'acceptation** est la région complémentaire de la région critique W. Elle correspond à l'intervalle dans lequel les différences observées entre les réalisations et la théorie sont attribuables aux fluctuations d'échantillonnage.

Remarque

Dans la plupart des situations que vous rencontrerez dans la suite, la région d'acceptation $\overline{W}$ peut être reliée au risque d'erreur de première espèce α par $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}\left[\overline{W}\right] = 1 - \alpha$.

Sommaire

Comment réaliser un test et conclure à l'aide d'une région critique ?

1. Choix des deux hypothèses $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$.
2. Détermination de la variable de décision.
3. Allure de la région critique en fonction de $\mathcal{H}_1$: test bilatéral ou unilatéral.
4. Calcul de la région critique en fonction de α.
5. Calcul de la variable de décision observée sur l'échantillon.

Comment réaliser un test et conclure à l'aide d'une région critique ?

1. Choix des deux hypothèses $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$.
2. Détermination de la variable de décision.
3. Allure de la région critique en fonction de $\mathcal{H}_1$: test bilatéral ou unilatéral.
4. Calcul de la région critique en fonction de α.
5. Calcul de la variable de décision observée sur l'échantillon.

Comment réaliser un test et conclure à l'aide d'une région critique ?

1. Choix des deux hypothèses $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$.
2. Détermination de la variable de décision.
3. Allure de la région critique en fonction de $\mathcal{H}_1$: test bilatéral ou unilatéral.
4. Calcul de la région critique en fonction de α.
5. Calcul de la variable de décision observée sur l'échantillon.

Comment réaliser un test et conclure à l'aide d'une région critique ?

1. Choix des deux hypothèses $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$.
2. Détermination de la variable de décision.
3. Allure de la région critique en fonction de $\mathcal{H}_1$: test bilatéral ou unilatéral.
4. Calcul de la région critique en fonction de α.
5. Calcul de la variable de décision observée sur l'échantillon.

Comment réaliser un test et conclure à l'aide d'une région critique ?

1. Choix des deux hypothèses $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$.
2. Détermination de la variable de décision.
3. Allure de la région critique en fonction de $\mathcal{H}_1$: test bilatéral ou unilatéral.
4. Calcul de la région critique en fonction de α.
5. Calcul de la variable de décision observée sur l'échantillon.

Comment réaliser un test et conclure à l'aide d'une région critique ?

6. Conclusion du test.
   Si la valeur calculée en 5 appartient à la région construite en 4, le test est significatif au niveau α.
   Vous rejetez l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ est vraie.
   Le risque associé à cette décision est un risque d'erreur de première espèce qui vaut α.

   Si la valeur calculée en 5 n'appartient pas à la région construite en 4, le test n'est pas significatif au niveau α.
   Vous conservez l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ par défaut.
   Le risque associé à cette décision est un risque d'erreur de deuxième espèce qui vaut β. Pour l'évaluer, il faudrait calculer la puissance $1-\beta$ du test.

Comment réaliser un test et conclure à l'aide d'une région critique ?

7. Calcul de la puissance $1 - \beta$ du test lorsque celui-ci n'est pas significatif.

Comment réaliser un test et conclure à l'aide d'une p-valeur ?

1. Choix des deux hypothèses $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$.
2. Détermination de la variable de décision.
3. Calcul de la p-valeur à partir des données de l'échantillon.

Comment réaliser un test et conclure à l'aide d'une p-valeur ?

1. Choix des deux hypothèses $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$.
2. Détermination de la variable de décision.
3. Calcul de la p-valeur à partir des données de l'échantillon.

Comment réaliser un test et conclure à l'aide d'une *p*-valeur ?

1. Choix des deux hypothèses $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$.
2. Détermination de la variable de décision.
3. Calcul de la *p*-valeur à partir des données de l'échantillon.

Comment réaliser un test et conclure à l'aide d'une p-valeur ?

4. Conclusion du test.
   Si la p-valeur est inférieure ou égale à α, le test est significatif au niveau α.
   Vous rejetez l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ est vraie.
   Le risque associé à cette décision est un risque d'erreur de première espèce qui vaut α.

   Si la p-valeur est strictement supérieure à α, le test n'est pas significatif au niveau α.
   Vous conservez l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ par défaut.
   Le risque associé à cette décision est un risque d'erreur de deuxième espèce qui vaut β. Pour l'évaluer, il faudrait calculer la puissance $1-\beta$ du test.

Comment réaliser un test et conclure à l'aide d'une *p*-valeur ?

5. Calcul de la puissance $1 - \beta$ du test lorsque celui-ci n'est pas significatif.

Introduction

Plusieurs tests de conception très différente sont souvent disponibles pour soumettre à une épreuve de vérité une hypothèse.

Définition

Le **test le plus puissant** est le test qui fournit l'erreur β la plus petite, pour une même valeur de α ou encore qui fournit la plus grande valeur de la puissance $1-\beta$.

Intérêt pratique

Il peut détecter les plus petites différences entre les populations sans pour autant augmenter α.

Conditions d'utilisations

La majorité des tests statistiques repose sur le respect d'un certain nombre de conditions. Selon le degré de respect de ces conditions d'utilisation, la validité des résultats se trouve plus ou moins affectée et elle l'est d'autant plus que le test est moins robuste.

Définition

La **robustesse d'un test** équivaut à sa tolérance vis-à-vis du respect des conditions d'application du test.

À retenir

Vous pouvez disposer de plusieurs tests pour vérifier une même hypothèse. En fonction du contexte, il faudra penser à utiliser le plus puissant d'entre eux. Vous apprendrez bientôt les différentes caractéristiques des tests les plus fréquemment utilisés.

Remarque

1. Les tests peu puissants augmentent la probabilité de commettre une erreur de deuxième espèce. Or, cette erreur peut s'avérer particulièrement grave.

Exemple d'erreur de deuxième espèce

En effet, en médecine, considérez une analyse statistique qui permettrait de décider si un patient est sain ($\mathcal{H}_0$) ou malade ($\mathcal{H}_1$). Classer comme malade un sujet bien portant (erreur de première espèce), peut avoir des conséquences aussi graves que classer comme bien portant un sujet malade (erreur de deuxième espèce).

2. Pour évaluer la puissance d'un test, vous pourrez être amené à utiliser des **courbes de puissance** ou encore appelées **abaques**.

Sommaire

Problématique

Un problème fréquent est de comparer la moyenne d'un caractère d'une population avec une norme.

Nous supposons que ce caractère est distribué normalement au sein de la population.

Test unilatéral

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 connue.

Hypothèses du test

Vous souhaitez choisir entre les deux hypothèses suivantes :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0 \text{ ou } \mu < \mu_0.}$$

Conditions d'application du test

Il faut que l'échantillon $x_1, \ldots, x_n$ soit des réalisations indépendantes de la variable aléatoire X qui suit une loi normale.

Statistique du test

La variable aléatoire $Z = \dfrac{\widehat{\mu}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.

Décision et conclusion du test

La valeur critique du test, notée c_α, est lue dans la table de la loi normale centrée et réduite. Si la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée z_{obs}, est supérieure ou égale à c_α (ou inférieure ou égale à c_α), alors le test est significatif. Vous rejetez $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec un risque de première espèce $\alpha = 5\%$. Si la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée z_{obs}, est strictement inférieure à c_α, alors le test n'est pas significatif. Vous conservez $\mathcal{H}_0$ avec un risque de deuxième espèce β.

Test bilatéral

Hypothèses du test

Vous souhaitez choisir entre les deux hypothèses suivantes :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \mu \neq \mu_0.}$$

Conditions d'application du test

Il faut que l'échantillon $x_1, \ldots, x_n$ soit des réalisations indépendantes de la variable aléatoire X qui suit une loi normale.

Statistique du test

La variable aléatoire $Z = \dfrac{\widehat{\mu}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

Décision et conclusion du test

La valeur critique du test, notée c_α, est lue dans la table de la loi normale centrée et réduite. Si la valeur absolue de la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée z_{obs}, est supérieure ou égale à c_α, alors le test est significatif. Vous décidez de rejeter $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec un risque d'erreur de première espèce $\alpha = 5\%$. Si la valeur absolue de la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée z_{obs}, est strictement inférieure à c_α, alors le test n'est pas significatif. Vous décidez de conserver $\mathcal{H}_0$ avec un risque d'erreur de deuxième espèce β qu'il faudrait évaluer.

D'après « Mathématiques pour les sciences de l'ingénieur », F. Bertrand, S. Ferrigno, D. Marx, M. Maumy-Bertrand et A. Muller-Gueudin.

Dans l'atmosphère, le taux d'un gaz nocif, pour un volume donné, suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 égale à 100. 30 prélèvements ont été effectués et les valeurs de ces 30 prélèvements sont les suivantes :

$$52,0;\ 60,2;\ 68,8;\ 46,8;\ 62,2;\ 53,5;\ 50,9;\ 44,9;\ 73,2;\ 60,4;$$
$$61,9;\ 67,8;\ 30,5;\ 52,5;\ 40,4;\ 29,6;\ 58,3;\ 62,6;\ 53,6;\ 64,6;$$
$$54,4;\ 53,8;\ 49,8;\ 57,4;\ 63,1;\ 53,4;\ 59,4;\ 48,6;\ 40,7;\ 51,9.$$

Pouvez-vous conclure au risque $\alpha = 5\%$, que l'espérance μ est inférieure à 50, qui est le seuil tolérable admis ?

Suite de l'exemple

La marche à suivre pour répondre à cette question est la suivante :

1. réaliser le test de normalité de Shapiro-Wilk sur l'échantillon des 30 prélèvements,
2. puis faire le calcul « à la main », ou avec un logiciel, de la statistique associée au test unilatéral que vous avez choisi pour répondre à cette question.

Solution

La ligne de commande que vous devez taper pour rentrer les données est la suivante :

```
gaz<-c(52.0,60.2,68.8,46.8,62.2,53.5,50.9,44.9,73.2,
60.4,61.9,67.8,30.5,52.5,40.4,29.6,
58.3,62.6,53.6,64.6,54.4,53.8,49.8,
57.4,63.1,53.4,59.4,48.6,40.7,51.9)
```

Pour tester la normalité de l'échantillon gaz avec le test de Shapiro-Wilk, vous tapez la ligne de commande suivante :

```
> shapiro.test(gaz)
```

Suite de la solution

R renvoie le résultat suivant :

```
Shapiro-Wilk normality test


data: gaz
W = 0.9599, p-value = 0.3077
```

La *p*-valeur (0,3077) du test de Shapiro-Wilk étant strictement supérieure à $\alpha = 5\%$, le test n'est pas significatif. Vous conservez donc l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ du test de Shapiro-Wilk. Le risque d'erreur associé à cette décision est un risque de deuxième espèce β. Vous ne pouvez pas l'évaluer dans le cas d'un test de Shapiro-Wilk.

Suite de l'exemple

Maintenant, vous allez réaliser le test qui a été présenté ci-dessus. Vous commencez par déterminer la zone d'acceptation. Pour cela vous avez besoin de connaître la valeur du quantile de la loi normale centrée et réduite à $0,95$. Pour récupérer la valeur de ce quantile, tapez la ligne de commande suivante :

```
> qnorm(0.95)
[1] 1.644854
```

Vous en déduisez la zone d'acceptation ou encore appelée également la zone de non-rejet :

$$]-\infty; 1,644854[.$$

Suite de l'exemple

Ensuite, vous allez calculer la statistique du test et voir si cette dernière appartient ou pas à la région d'acceptation. Pour cela, vous allez taper les deux lignes de commande suivantes :

```
> z<-(sqrt(30)*(mean(gaz)-50))/10
> z
[1] 2.322344
```

Comme $2,322344$ n'appartient pas à l'intervalle $]-\infty;1,644854[$, le test est significatif. Vous décidez de rejeter $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec un risque d'erreur de première espèce $\alpha = 5\%$. Donc vous pouvez conclure, avec un risque $\alpha = 5\%$, que l'espérance μ est supérieure à 50, qui est le seuil tolérable admis.

Suite de l'exemple

Vous venez de raisonner avec la statistique de test, mais il est évident que vous pouvez aussi raisonner en terme de p-valeur. Il suffit pour cela de taper les lignes de commande suivantes :

```
> install.packages("TeachingDemos")
> library(TeachingDemos)
> z.test(gaz,mu=50,sd=10,alternative="greater",
+conf.level=0.95)
```

Suite de l'exemple

Le logiciel R vous renvoie la sortie suivante :

```
One Sample z-test

data: gaz
z = 2.3223, n = 30.000, Std. Dev. = 10.000,
Std. Dev. of the sample mean = 1.826,
p-value = 0.01011
alternative hypothesis: true mean is greater than 50
95 percent confidence interval:
51.23692 Inf
sample estimates:
mean of gaz
54.24
```

Fin de l'exemple

La p-valeur (0,01011) du test z étant strictement inférieure à $\alpha = 5\%$, le test est significatif. Vous décidez de rejeter $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec un risque d'erreur de première espèce $\alpha = 5\%$. Donc vous pouvez conclure, avec un risque $\alpha = 5\%$, que l'espérance μ est supérieure à 50, qui est le seuil tolérable admis.

À noter

Que ce soit un raisonnement avec la statistique du test ou avec la p-valeur, la conclusion du test est identique.

Test unilatéral I

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 inconnues.

Remarque

Le test unilatéral se déduit aisément du test bilatéral.

Test bilatéral I

Hypothèses du test

Ce sont les mêmes que précédemment.

Conditions d'application du test

Il faut que l'échantillon $x_1, \ldots, x_n$ soit des réalisations indépendantes de la variable aléatoire X qui suit une loi normale.

Statistique du test

La variable aléatoire $T_{n-1} = \dfrac{\widehat{\mu}_n - \mu_0}{S_{n,c}/\sqrt{n}}$ suit une loi de Student $t(n-1)$.

Test bilatéral II

Décision et conclusion du test

La valeur critique du test, notée c_α, est lue dans une table de la loi de Student. Si la valeur absolue de la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée $t_{n-1,obs}$, est supérieure ou égale à c_α, alors le test est significatif. Vous décidez de rejeter $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec un risque d'erreur de première espèce $\alpha = 5\%$. Si la valeur absolue de la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée $t_{n-1,obs}$, est strictement inférieure à c_α, alors le test n'est pas significatif. Vous décidez de conserver $\mathcal{H}_0$ avec un risque d'erreur de deuxième espèce β qu'il faudrait évaluer.

Test bilatéral III

Remarque

Dans le cas où la condition d'application n'est pas vérifiée, il vous faut alors utiliser un test non paramétrique : le test des signes ou le test des rangs signés de Wilcoxon. Ce dernier demande aussi une condition d'application mais moins restrictive, à savoir que la variable dont est issu l'échantillon doit être distribuée symétriquement. Notez aussi que les hypothèses associées à ce test ne sont pas les mêmes.

Exemple

Le jardinier aimerait savoir si les glycines blanches qu'il a plantées sur son terrain suivent bien les spécificités de la notice qu'il a reçu lorsqu'il a commandé ses graines sur internet. Il était indiqué sur la notice que chaque gousse de glycines blanches à maturité doit mesurer 15 cm de long. Comment peut-il s'assurer que les gousses qu'il a dans son jardin suivent bien cette spécificité ?

Démarche à suivre

Il contacte un étudiant en licence de biologie pour l'aider à répondre à sa question. L'étudiant lui propose de faire un test de Student sur ses données. La procédure est la suivante :

1. réaliser le test de normalité de Shapiro-Wilk sur l'échantillon,
2. puis réaliser le test de Student puisque l'étudiant n'a aucune information sur la variance de la population qui est donc inconnue.

Solution

La ligne de commande que vous devez taper pour extraire les données qui sont étudiées est la suivante :

```
> glycine<-subset(Mesures,
subset=(Mesures$espece=="glycine blanche"))
```

Pour tester la normalité de l'échantillon `taille` avec le test de Shapiro-Wilk, vous tapez la ligne de commande suivante :

```
> shapiro.test(glycine$taille)
```

`R` renvoie le résultat suivant :

```
Shapiro-Wilk normality test
data: glycine$taille
W = 0.9798, p-value = 0.4906
```

Suite de la solution

La p-valeur (0,4906) du test de Shapiro-Wilk étant strictement supérieure à $\alpha = 5\%$, le test n'est pas significatif. Vous conservez donc $\mathcal{H}_0$. Le risque d'erreur associé à cette décision est un risque de deuxième espèce β. Vous ne pouvez pas l'évaluer dans le d'un test de Shapiro-Wilk.
Vous pouvez donc effectuer le test de Student comme le suggère l'étudiant en licence de biologie.

Suite de la solution

Pour cela, vous tapez la ligne de commande suivante en spécifiant $\mu_0 = 15cm$:

```
> t.test(glycine$taille,mu=15)
```

R renvoie le résultat suivant :

```
One Sample t-test
data: glycine$taille
t = -0.5067, df = 53, p-value = 0.6145
alternative hypothesis: true mean is not equal to 15
95 percent confidence interval:
13.87050 15.67395
sample estimates:
mean of x
14.77222
```

Suite de la solution

La p-valeur (0,6145) du test de Student étant strictement supérieure à $\alpha = 5\%$, le test n'est pas significatif. Vous conservez donc $\mathcal{H}_0$. Le risque d'erreur associé à cette décision est un risque de deuxième espèce β. Il vous reste donc à le calculer.

Pour cela, vous tapez la ligne de commande suivante :

```
> power.t.test(n=54,delta=mean(glycine$taille)-15,
sd=sd(glycine$taille),type="one.sample",
alternative="two.sided")
```

Suite de la solution

R renvoie le résultat suivant :

```
One-sample t test power calculation
n = 54
delta = 0.2277778
sd = 3.303652
sig.level = 0.05
power = 0.07181315
alternative = two.sided
```

Cette puissance est faible. Une puissance convenable serait de l'ordre de 0,80.

Suite de l'Exemple

Mais quelle serait donc la taille de l'échantillon à prélever sur le terrain du jardinier ?

Pour répondre à cette question, vous tapez la ligne de commande suivante :

```
> power.t.test(power=.8,delta=mean(glycine$taille)-15,
sd=sd(glycine$taille),type="one.sample",
alternative="two.sided")
```

Fin de la solution

Le logiciel R renvoie le résultat suivant :

```
One-sample t test power calculation
n = 1653.023
delta = 0.2277778
sd = 3.303652
sig.level = 0.05
power = 0.8
alternative = two.sided
```

Il faudrait que le jardinier prélève 1654 gousses de glycines blanches pour obtenir une puissance supérieure ou égale à 0,80.

Sommaire

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ connue et de variance σ^2 inconnue.

Remarque

Le test unilatéral se déduit aisément du test bilatéral.

Test bilatéral I

Hypothèses du test

Vous souhaitez choisir entre les deux hypothèses suivantes :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2.}$$

Conditions d'application du test

Il faut que l'échantillon $x_1, \ldots, x_n$ soit des réalisations indépendantes de la variable aléatoire X qui suit une loi normale.

Statistique du test

La variable aléatoire $\dfrac{n\widehat{\sigma}_n^2}{\sigma_0^2}$ suit une loi du Khi-deux $\chi^2(n)$.

Test bilatéral III

Décision et conclusion du test

Les valeurs critiques du test, notées $c_{\alpha/2,n}$ et $c_{1-\alpha/2,n}$, sont lues dans une table de la loi du Khi-deux. Si la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée $\chi^2_{obs}(n)$, n'appartient pas à l'intervalle $]c_{\alpha/2,n}, c_{1-\alpha/2,n}[$, alors le test est significatif. Vous décidez de rejeter $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec un risque d'erreur de première espèce $\alpha = 5\%$.
Si la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée $\chi^2_{obs}(n)$, appartient à l'intervalle $]c_{\alpha/2,n}, c_{1-\alpha/2,n}[$, alors le test n'est pas significatif. Vous décidez de ne pas rejeter $\mathcal{H}_0$ et vous décidez de conserver $\mathcal{H}_0$ avec un risque d'erreur de deuxième espèce β qu'il faudrait évaluer.

Exemple

Une entreprise alsacienne spécialisée dans la fabrication de pâtes aux œufs frais fonde sa publicité sur l'affirmation suivante : 7 œufs frais au kg, soit 30% de la composition. Le producteur s'engage ainsi à respecter certaines normes de qualité de fabrication portant sur les caractéristiques de la variable aléatoire X représentant le pourcentage d'œufs dans la composition d'un paquet, supposée de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. En particulier, il s'engage sur le fait que l'écart-type σ ne dépasse pas 1%.
Une grande surface reçoit un lot de ces pâtes et désire vérifier la qualité du fournisseur. Nous supposons l'espérance $\mu = 30\%$ connue et σ^2 inconnue.

Suite de l'exemple

Un échantillon de n paquets est tiré au hasard. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ les observations après analyse. Sur un échantillon de taille $n = 81$, nous avons observé $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2430$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 73000$.
Tester les hypothèses associées au problème au seuil de significativité $\alpha = 5\%$.

C'est à vous !

Vous traiterez cet exemple en T.D.

Test unilatéral I

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 inconnues.

Remarque

Le test unilatéral se déduit aisément du test bilatéral.

Test bilatéral I

Hypothèses du test

Ce sont les mêmes que précédemment.

Conditions d'application du test

Il faut que l'échantillon $x_1, \ldots, x_n$ soit des réalisations indépendantes de la variable aléatoire X qui suit une loi normale.

Statistique du test

La variable aléatoire $\dfrac{(n-1)S_{n,c}^2}{\sigma_0^2}$ suit une loi du Khi-deux $\chi^2(n-1)$.

Test bilatéral II

Décision et conclusion du test

Les valeurs critiques du test, notées $c_{\alpha/2,n-1}$ et $c_{1-\alpha/2,n-1}$, sont lues dans une table de la loi du Khi-deux. Si la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée $\chi^2_{obs}(n-1)$, n'appartient pas à l'intervalle $]c_{\alpha/2,n-1}, c_{1-\alpha/2,n-1}[$, alors le test est significatif. Vous décidez de rejeter $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec un risque d'erreur de première espèce $\alpha = 5\%$.
Si la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée $\chi^2_{obs}(n-1)$, appartient à l'intervalle $]c_{\alpha/2,n-1}, c_{1-\alpha/2,n-1}[$, alors le test n'est pas significatif. Vous décidez de ne pas rejeter $\mathcal{H}_0$ et vous décidez de conserver $\mathcal{H}_0$ avec un risque d'erreur de deuxième espèce β qu'il faudrait évaluer.

Exemple

Vous venez d'acquérir dans votre laboratoire une nouvelle balance et vous souhaitez comparer la régularité du travail de cette dernière pour des très petites pesées à la norme habituelle du descriptif pour laquelle la variance σ^2 est égale à $4g^2$. Vous prélevez un échantillon d'effectif égal à 30 dont les valeurs sont données ci-dessous :

$$\begin{array}{l} 2,53;\ 1,51;\ 1,52;\ 1,44;\ 4,32;\ 2,36;\ 2,41;\ 2,06;\ 1,57;\ 1,68; \\ 3,09;\ 0,54;\ 2,32;\ 0,19;\ 2,66;\ 2,20;\ 1,04;\ 1,02;\ 0,74;\ 1,01; \\ 0,35;\ 2,42;\ 2,66;\ 1,11;\ 0,56;\ 1,75;\ 1,51;\ 3,80;\ 2,22;\ 2,88. \end{array}$$

Au risque $\alpha = 5\%$, pouvez-vous considérer que la variance de l'échantillon est conforme à la norme souhaitée ?

Démarche à suivre

Pour répondre à la question posée, vous devez réaliser le test présenté ci-dessus, puisque vous ne connaissez pas l'espérance μ. La procédure est toujours la même, à savoir :

1. réaliser un test de Shapiro-Wilk sur l'échantillon,
2. puis calculer la statistique associée au test bilatéral présenté ci-dessus.

Solution

La ligne de commande que vous devez taper pour rentrer les données est la suivante :

```
> pesee<-c(2.53,1.51,1.52,1.44,4.32,2.36,2.41,2.06,
1.57,1.68,3.09,0.54,2.32,0.19,2.66,2.20,1.04,1.02,
0.74,1.01,0.35,2.42,2.66,1.11,0.56,1.75,1.51,3.80,
2.22,2.88)
```

Pour tester la normalité de l'échantillon `pesee` avec le test de Shapiro-Wilk, vous tapez la ligne de commande suivante :

```
> shapiro.test(pesee)
```

Suite de la solution

R renvoie le résultat suivant :

```
Shapiro-Wilk normality test

data: pesee
W = 0.97163, p-value = 0.5848
```

La *p*-valeur (0,5848) du test de Shapiro-Wilk étant strictement supérieure à $\alpha = 5\%$, le test n'est pas significatif. Vous conservez donc $\mathcal{H}_0$. Le risque d'erreur associé à cette décision est un risque de deuxième espèce β. Vous ne pouvez pas l'évaluer dans le cas d'un test de Shapiro-Wilk.

Suite de la solution

Vous pouvez donc maintenant calculer la statistique de test.
Pour cela, vous tapez la ligne de commande suivante :

```
> ((length(pesee)-1)*var(pesee))/4
```

qui vous donne comme résultat :

```
[1] 7.135268
```

Maintenant, il ne vous reste plus qu'à calculer les quantiles de la loi du Khi-deux $\chi^2(29)$ en tapant les deux lignes de commande suivantes :

```
> qchisq(0.025,29)
> qchisq(0.975,29)
```

R renvoie comme résultats :

```
[1] 16.04707
```

et `[1] 45.72229`

Fin de la solution

Comme la valeur de la statistique (7,135268) du test calculée sur l'échantillon n'appartient pas à l'intervalle $]16,04707; 45,72229[$, le test est significatif. Vous rejetez $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec un risque d'erreur de première espèce $\alpha = 5\%$.
Vous considérez donc que la variance de cette nouvelle balance n'est pas conforme à la norme habituelle du descriptif avec un risque d'erreur de première espèce $\alpha = 5\%$.

Solution avec le logiciel R

Vous venez de raisonner avec la statistique de test, mais il est évident que vous pouvez aussi raisonner en terme de *p*-valeur. Il suffit pour cela de taper les lignes de commande suivantes :

```
> shapiro.test(pesee)
```

R renvoie le résultat suivant :

```
Shapiro-Wilk normality test

data: pesee
W = 0.97163, p-value = 0.5848
```

Suite de la solution avec le logiciel R

```
> install.packages("OneTwoSamples")
> library(OneTwoSamples)
> var_test1(pesee,sigma2=4)
```

R renvoie comme résultats :

```
    var       df chisq2   P_value
1   0.9841748 29 7.135268 2.227029e-05
```

Fin de la solution avec R

Comme la p-valeur (2,227029e-05) du test calculée sur l'échantillon est inférieure à $\alpha = 5\%$, le test est significatif. Vous rejetez $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec un risque d'erreur de première espèce $\alpha = 5\%$. Vous considérez donc que la variance de cette nouvelle balance n'est pas conforme à la norme habituelle du descriptif avec un risque d'erreur de première espèce $\alpha = 5\%$.

Sommaire

Dans les tests précédents sur les espérances, il est possible de remplacer l'hypothèse de normalité par une hypothèse portant sur la taille de l'échantillon analysé. Généralement, un échantillon d'effectif supérieur ou égal à 30 permet une telle approximation.

Dans les tests précédents sur les variances, il est possible de remplacer l'hypothèse de normalité par une hypothèse portant sur la taille de l'échantillon analysé. Généralement, un échantillon d'effectif supérieur ou égal à 30 permet une telle approximation.

Sommaire

Test unilatéral I

Remarque

Le test unilatéral se déduit aisément du test bilatéral.

Test bilatéral I

Hypothèses du test

Vous souhaitez choisir entre les deux hypothèses suivantes :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \pi_A = \pi_0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \pi_A \neq \pi_0.}$$

Conditions d'application du test

Il faut que l'échantillon $x_1, \ldots, x_n$ soit des réalisations indépendantes.

Test bilatéral II

Statistique du test

La variable aléatoire $n\widehat{\pi}_{n,A} = n_A$ ($\widehat{\pi}_{n,A}$ a été défini dans le chapitre précédent) suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \pi_0)$.

Test bilatéral III

Décision et conclusion du test

La valeur critique du test, notée c_α, est lue dans une table de la loi binomiale. Si la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée $n_A(obs)$, est supérieure ou égale à c_α, alors le test est significatif. Vous décidez de rejeter $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec un risque de première espèce $\alpha = 5\%$. Si la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée $n_A(obs)$, est strictement inférieure à c_α, alors le test n'est pas significatif. Vous décidez de conserver $\mathcal{H}_0$ avec un risque de deuxième espèce β qu'il faudrait évaluer.

Vous pouvez trouver dans la littérature une variation de ce test, qui va être présentée ci-dessous, avec cette fois-ci d'autres conditions d'application et une autre statistique que celle présentée précédemment. Cette variation utilise l'approximation de la loi binomiale par une loi normale. Cette approximation a longtemps été utilisée mais avec des logiciels comme `R`, il est préférable d'avoir recours au test exact présenté ci-dessus.

Remarque

Le test unilatéral se déduit aisément du test bilatéral.

Test bilatéral I

Hypothèses du test

Ce sont les mêmes que précédemment.

Conditions d'application du test

Il faut que l'échantillon $x_1, \ldots, x_n$ soit des réalisations indépendantes. De plus, il faut que les trois inégalités $n \geqslant 50$, $n\pi_0 \geqslant 16$ et $n(1 - \pi_0) \geqslant 16$ soient vérifiées.

Statistique du test

La variable aléatoire $Z = \dfrac{\widehat{\pi}_{n,A} - \pi_0}{\sqrt{\dfrac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

Test bilatéral II

Décision et conclusion du test

La valeur critique du test, notée c_α, est lue dans la table de la loi normale centrée et réduite.
Si la valeur absolue de la statistique calculée sur l'échantillon, notée z_{obs}, est supérieure ou égale à c_α, alors le test est significatif. Vous décidez de rejeter $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec un risque de première espèce $\alpha = 5\%$.
Si la valeur absolue de la statistique calculée sur l'échantillon, notée z_{obs}, est strictement inférieure à c_α, alors le test n'est pas significatif. Vous décidez de ne pas rejeter $\mathcal{H}_0$ et par conséquent vous décidez de conserver $\mathcal{H}_0$ en commettant un risque de deuxième espèce β qu'il faudrait évaluer.

Test bilatéral III

Remarque

La correction de continuité de Yates (qui permet le passage d'une loi discrète à une loi continue) dans le calcul de la statistique de test Z peut être appliquée. Elle permet un meilleur ajustement de la fluctuation de la statistique de test à la loi normale et en particulier lorsque la taille n de l'échantillon est faible.

Test bilatéral IV

À retenir

Il existe donc deux fonctions sous `R` pour réaliser ce test de comparaison à une norme.

1. La fonction sous `R` qui utilise la variable aléatoire n_A est la fonction `binom.test`. Cette fonction travaille toujours avec la loi binomiale et n'utilise pas l'approximation de la loi binomiale par la loi normale. Elle fournit une p-valeur exacte du test. Cette fonction est donc préférable, d'autant plus que la taille n de l'échantillon est faible.
2. La fonction sous `R` qui utilise la variable aléatoire Z est la fonction `prop.test`. La fonction applique la correction de continuité de Yates par défaut.

Exemple

Dans le « Ouest-France » du samedi 23 janvier 2010, vous pouvez lire : « Plus de garçons que de filles ! Avec 507 bébés mâles comptabilisés à Saint-Lô en 2009, contre 481 fillettes, les naissances masculines sont toujours plus nombreuses. » Pensez-vous que les garçons sont plus nombreux significativement que les filles, avec un risque $\alpha = 5\%$?

Solution avec le logiciel R

Pour répondre à cette question, vous allez utiliser le test présenté ci-dessus, dans sa version exacte puisque vous avez R sous la main. Vous devez taper la ligne de commande suivante :

```
> binom.test(507,988,0.5)
```

Suite de la solution avec le logiciel R

R renvoie le résultat suivant :

```
Exact binomial test


data: 507 and 988
number of successes = 507, number of trials = 988,
p-value = 0.4264
alternative hypothesis: true probability of success
is not equal
to 0.5
95 percent confidence interval:
0.4814855 0.5447516
sample estimates:
probability of success
0.5131579
```

Fin de la solution avec le logiciel R

Comme la p-valeur (0,4264) du test exact basé sur la loi binomiale est strictement supérieure à $\alpha = 5\%$, le test n'est pas significatif. Vous conservez donc $\mathcal{H}_0$. Le risque d'erreur associé à cette décision est un risque de deuxième espèce β. Il faudrait l'évaluer.
Donc vous pouvez conclure, au seuil $\alpha = 5\%$, que le journaliste n'a pas tout à fait raison en déclarant que « les naissances masculines sont toujours très nombreuses. »

Si l'effectif de l'échantillon prélevé est inférieur à 10% de l'effectif total de la population, il est possible de considérer que le tirage a lieu sans remise et d'utiliser les résultats précédents.

Sommaire

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et Y une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ avec σ_1 et σ_2 connues.

Remarque

Le test unilatéral se déduit aisément du test bilatéral.

Test bilatéral I

Hypothèses du test

Vous souhaitez choisir entre les deux hypothèses suivantes :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \mu_1 = \mu_2}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2.}$$

Test bilatéral II

Conditions d'application du test

Il faut que l'échantillon $x_1, \ldots, x_n$ soit des réalisations indépendantes de la variable aléatoire X qui suit une loi normale et que le second échantillon aléatoire $y_1, \ldots, y_{n_2}$ soit aussi des réalisations indépendantes de la variable aléatoire Y qui suit une loi normale. De plus, les effectifs n_1 et n_2 peuvent ne pas être égaux.

Statistique du test

La variable aléatoire $Z = \dfrac{\widehat{\mu}_{n_1} - \widehat{\mu}_{n_2}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Test bilatéral III

Décision et conclusion du test

La valeur critique du test, notée c_α, est lue dans la table de la loi normale centrée et réduite.
Si la valeur absolue de la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée z_{obs} est supérieure ou égale à c_α, alors le test est significatif. Vous décidez de rejeter $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec un risque d'erreur de première espèce α. Si la valeur absolue de la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée z_{obs} est strictement inférieure à c_α, alors le test n'est pas significatif. Vous décidez de conserver $\mathcal{H}_0$ avec un risque d'erreur de deuxième espèce β qu'il faudrait évaluer.

Exemple

Pour mesurer de pH d'une solution, nous utilisons un pH-mètre qui affiche un résultat dont la loi est $\mathcal{N}(\mu; 0,05)$, où μ est la vraie valeur du pH de la solution. Nous avons mesuré le pH d'une solution A par 16 mesures indépendantes et trouvé une moyenne de 7,04, et mesuré le pH d'une solution B par 20 mesures indépendantes et trouvé une moyenne de 7,05. Pouvez-vous considérer que les deux solutions ont le mëme pH au seuil de significativité $\alpha = 5\%$?

Remarque

Le test unilatéral se déduit aisément du test bilatéral.

Test bilatéral I

Hypothèses du test

Ce sont les mêmes que précédemment.

Conditions d'application du test

Il faut que l'échantillon $x_1, \ldots, x_n$ soit des réalisations indépendantes de la variable aléatoire X qui suit une loi normale et que le second échantillon aléatoire $y_1, \ldots, y_{n_2}$ soit aussi des réalisations indépendantes de la variable aléatoire Y qui suit une loi normale. De plus, les effectifs n_1 et n_2 peuvent ne pas être égaux.
Maintenant il faut distinguer deux cas : soit $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, soit $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Test bilatéral II

Le test de Student.

Cas où $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.

Une question que vous devez vous poser est : « comment vérifier cette hypothèse ? ». Pour tester cette hypothèse , vous allez utiliser le test de Fisher-Snedecor qui est présenté plus loin.

Statistique du test

La variable aléatoire $T_{n_1+n_2-2} = \dfrac{\widehat{\mu}_{n_1} - \widehat{\mu}_{n_2}}{\widehat{\sigma}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ où $\widehat{\sigma} = \sqrt{\dfrac{n_1 S_{n_1}^2 + n_2 S_{n_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}}$

suit une loi de Student $t(n_1 + n_2 - 2)$.

Test bilatéral III

Décision et conclusion du test

La valeur critique du test, notée c_α, est lue dans une table de la loi de Student. Si la valeur absolue de la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée $t_{n_1+n_2-2,obs}$ est supérieure ou égale à c_α, alors le test est significatif. Vous décidez de rejeter $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec un risque de première espèce α. Si la valeur absolue de la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée $t_{n_1+n_2-2,obs}$ est strictement inférieure à c_α, alors le test n'est pas significatif. Vous décidez de conserver $\mathcal{H}_0$ avec un risque de deuxième espèce β qu'il faudrait évaluer.

Le jus d'orange contre l'acide ascorbique I

Exemple

D'après Couty-Fredon, Debord, Fredon, « Mini Manuel de Probabilités et Statistique », aux éditions Dunod, 2007.

Pour comparer l'effet de la vitamine C du jus d'orange et de l'acide ascorbique de synthèse, nous avons donné, pendant 6 semaines, du jus d'orange à un groupe de 10 cobayes et de la vitamine de synthèse à un groupe de 10 autres cobayes. Puis nous avons mesuré la longueur des odontoblastes des incisives. Des études antérieures, réalisées sur de grands échantillons, ont permis de montrer que la longueur des odontoblastes des incisives suit une loi normale.

Suite de l'exemple

Les résultats suivants ont été relevés :

1. jus d'orange :

$$8,2;\ 9,4;\ 9,6;\ 9,7;\ 10,0;\ 14,5;\ 15,2;\ 16,1;\ 17,6; 21,5;$$

2. acide ascorbique

$$4,2;\ 5,2;\ 5,8;\ 6,4;\ 7,0;\ 7,3;\ 10,1;\ 11,2;\ 11,3;\ 11,5.$$

Testez, au risque $\alpha = 5\%$, l'hypothèse $\mathcal{H}_0$ « l'effet des deux produits est le même » contre $\mathcal{H}_1$ « le jus d'orange accélère plus la croissance que l'acide ascorbique ».

Démarche à suivre

Pour répondre à cette question, vous allez suivre la démarche suivante :

1. Rentrez les données en créant deux vecteurs. Vous nommerez le premier `jusorange` et le second `acideascorbique`.
2. Testez ensuite la normalité de chacun des deux échantillons et concluez.
3. À partir des conclusions obtenues des deux tests de normalité, pouvez-vous envisager la démarche du cours : à savoir réaliser un test de Student pour répondre à la question qui vous est posée ?

Démarche à suivre : suite et fin

Dans le cadre du test de Student, il y a deux cas à différencier :

1. soit les deux variances des deux populations sont égales ;
2. soit les deux variances des deux populations ne le sont pas.

Pour répondre à cette question, réalisez un test de Fisher-Snedecor. D'après le résultat obtenu à la dernière question, adaptez le test de Student correspondant à cette réponse et concluez.

Solution avec le logiciel R

Vous tapez les deux lignes de commande suivantes :

```
> jusorange<-c(8.2,9.4,9.6,9.7,10,14.5,15.2,16.1,
17.6,21.5)
> acideascorbique<-c(4.2,5.2,5.8,6.4,7,7.3,10.1,11.2,
11.3,11.5)
```

Suite de la solution avec le logiciel R

Pour tester la normalité de l'échantillon `jusorange`, vous tapez la ligne de commande suivante :

```
> shapiro.test(jusorange)

Shapiro-Wilk normality test
data: jusorange
W = 0.8925, p-value = 0.1808
```

La *p*-valeur (0,1808) du test de Shapiro-Wilk étant strictement supérieure à $\alpha = 5\%$, le test n'est pas significatif. Vous conservez $\mathcal{H}_0$. Le risque d'erreur associé à cette décision est un risque de deuxième espèce β. Vous ne pouvez pas l'évaluer dans le cas présent.

Suite de la solution avec le logiciel R

Pour tester la normalité de l'échantillon `acideascorbique`, vous tapez la ligne de commande suivante :

```
> shapiro.test(acideascorbique)

Shapiro-Wilk normality test
data: acideascorbique
W = 0.8865, p-value = 0.1547
```

La *p*-valeur (0,1547) du test de Shapiro-Wilk étant strictement supérieure à $\alpha = 5\%$, le test n'est pas significatif. Vous conservez $\mathcal{H}_0$. Le risque d'erreur associé à cette décision est un risque de deuxième espèce β. Vous ne pouvez pas l'évaluer dans le cas présent.

Suite de la solution avec le logiciel R

Comme les conditions d'application sont vérifiées, vous pouvez envisager de réaliser le test de Student pour deux populations.
Mais attention à la formulation de la question : ici il s'agit d'un test unilatéral.

Maintenant la question qui reste à résoudre est de savoir si les deux variances des deux populations sont égales ou pas.

Suite de la solution avec le logiciel R

Pour réaliser le test de Fisher-Snedecor, vous devez taper la ligne de commande suivante :

```
> var.test(jusorange,acideascorbique)
```

Suite de la solution avec le logiciel R

R renvoie le résultat suivant :

```
 F test to compare two variances
data: jusorange and acideascorbique
F = 2.5701, num df = 9, denom df = 9, p-value = 0.1759
alternative hypothesis: true ratio of variances is not
equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.6383833 10.3473187
sample estimates:
ratio of variances
 2.570128
```

Suite de la solution avec le logiciel R

La *p*-valeur (0,1759) du test de Fisher-Snedecor étant strictement supérieure à $\alpha = 5\%$, le test n'est pas significatif. Vous conservez $\mathcal{H}_0$. Le risque d'erreur associé à cette décision est un risque de deuxième espèce β qu'il faudrait évaluer. Donc vous pouvez conclure, au seuil $\alpha = 5\%$, que les deux variances des deux populations sont égales.

Suite de la solution avec le logiciel R

Il ne vous reste plus qu'à effectuer un test de Student dans le cas où les deux variances de deux populations sont égales. Pour cela, vous tapez la ligne de commande suivante :

```
> t.test(jusorange,acideascorbique,
alternative="greater",var.equal=TRUE)
```

Suite de la solution avec le logiciel R

R renvoie le résultat suivant :

```
 Two Sample t-test
data: jusorange and acideascorbique
t = 3.1319, df = 18, p-value = 0.002881
alternative hypothesis: true difference in means is greater
than 0
95 percent confidence interval:
 2.311966 Inf
sample estimates:
mean of x mean of y
 13.18 8.00
```

Fin de la solution avec le logiciel R

La p-valeur (0,002881) du test de Student étant inférieure ou égale à $\alpha = 5\%$, le test est significatif. Vous rejetez $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec un risque d'erreur de première espèce $\alpha = 5\%$.
Donc vous pouvez conclure, avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que le jus d'orange accélère plus la croissance que l'acide ascorbique.

Remarque

Le test unilatéral se déduit aisément du test bilatéral.

Hypothèses du test

Ce sont les mêmes que précédemment.

Conditions d'application du test

Il faut que l'échantillon $x_1, \ldots, x_n$ soit des réalisations indépendantes de la variable aléatoire X qui suit une loi normale et que le second échantillon aléatoire $y_1, \ldots, y_{n_2}$ soit aussi des réalisations indépendantes de la variable aléatoire Y qui suit une loi normale. De plus, les effectifs n_1 et n_2 peuvent ne pas être égaux.
Maintenant il faut distinguer deux cas : soit $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, soit $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Le test de Welch

Cas où $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Une question que vous devez vous poser est : « comment vérifier cette hypothèse ? ». Pour tester cette hypothèse , vous allez utiliser le test de Fisher-Snedecor qui est présenté ci-dessous.

Test bilatéral III

Statistique du test

La variable aléatoire $T_\nu = \dfrac{\widehat{\mu}_{n_1} - \widehat{\mu}_{n_2}}{\sqrt{\dfrac{S_{n_1}^2}{n_1 - 1} + \dfrac{S_{n_2}^2}{n_2 - 1}}}$ suit une loi de Student $t(\nu)$, où ν est l'entier le plus proche de $\dfrac{\left(\dfrac{S_{n_1}^2}{n_1 - 1} + \dfrac{S_{n_2}^2}{n_2 - 1}\right)^2}{\dfrac{S_{n_1}^4}{(n_1 - 1)n_1^2} + \dfrac{S_{n_2}^4}{(n_2 - 1)n_2^2}}$.

Test bilatéral IV

Décision et conclusion du test

La valeur critique du test, notée c_α, est lue dans une table de la loi de Student. Si la valeur absolue de la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée $t_{\nu,obs}$ est supérieure ou égale à c_α, alors le test est significatif. Vous décidez de rejeter $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec un risque de première espèce α. Si la valeur absolue de la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée $t_{\nu,obs}$ est strictement inférieure à c_α, alors le test n'est pas significatif. Vous décidez de conserver $\mathcal{H}_0$ avec un risque de deuxième espèce β qu'il faudrait évaluer.

Remarque

Le test de Student est assez robuste mais si vous vous éloignez trop de la condition de normalité qui est nécessaire pour procéder à ce test, il est préférable d'utiliser un test non paramétrique, comme par exemple le test de Mann-Whitney-Wilcoxon qui a aussi certaines conditions d'application à savoir l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$ est aléatoire et les variables X_i sont indépendantes. De plus, les deux distributions des deux variables doivent avoir la même forme. Cette dernière condition est très importante. En effet, dans le cas où elle ne serait pas respectée, le test de Mann-Whitney-Wilcoxon peut aboutir à des conclusions inexactes. Il vous est donc conseillé de faire une analyse graphique des deux distributions avant d'appliquer ce test.

Test bilatéral VI

À retenir

La fonction sous `R` qui permet de réaliser le test de Mann-Whitney-Wilcoxon est la fonction `wilcox.test`

Exemple

Un laboratoire pharmaceutique peut fabriquer un même médicament suivant deux procédés différents, équivalents du point de vue de leur coût. Nous avons mesuré la durée de conservation du médicament par 20 expériences indépendantes et obtenu les durées suivantes, exprimées en nombre d'années :

Procédé A :

4.3	1.2	3.3	1.7	1.9	1.5	4.0	2.9	2.1	4.5	3.8	3.2	1.1	3.
3.1	2.5	2.3	5.0	2.4	3.7	1.6	3,4	2.0	2.4	3.6	2.4	2.8	2.

Sommaire

Test unilatéral

Remarque

Le test unilatéral se déduit aisément du test bilatéral.

Test bilatéral I

Hypothèses du test

Vous souhaitez choisir entre les deux hypothèses suivantes :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.}$$

Test bilatéral II

Conditions d'application du test

Il faut que l'échantillon $x_1, \ldots, x_n$ soit des réalisations indépendantes de la variable aléatoire X qui suit une loi normale et que le second échantillon aléatoire $y_1, \ldots, y_{n_2}$ soit aussi des réalisations indépendantes de la variable aléatoire Y qui suit une loi normale. De plus n_1 et n_2 sont pas forcément égaux.

Statistique du test

La variable aléatoire $F = \frac{\widehat{\sigma^2}_{n_1}}{\widehat{\sigma^2}_{n_2}}$, où $\widehat{\sigma^2}_{n_1}$ et $\widehat{\sigma^2}_{n_2}$ ont été défini dans le cours précédent, suit une loi de Fisher $F(n_1, n_2)$.

Décision et conclusion du test

Les valeurs critiques du test de Fisher, notées $c_{\alpha/2,n_1,n_2}$ et $c_{1-\alpha/2,n_1,n_2}$, sont lues dans la table de la loi de Fisher.
Si la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée f_{obs}, n'appartient pas à l'intervalle $]c_{\alpha/2,n_1,n_2}; c_{1-\alpha/2,n_1,n_2}[$, alors le test est significatif. Vous décidez de rejeter $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec un risque de première espèce α.
Si la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée f_{obs}, appartient à $]c_{\alpha/2,n_1,n_2}; c_{1-\alpha/2,n_1,n_2}[$, alors le test n'est pas significatif. Vous décidez de ne pas rejeter $\mathcal{H}_0$ et par conséquent vous décidez de l'accepter en commettant un risque de deuxième espèce β qu'il faudrait évaluer.

Test unilatéral I

Remarque

Le test unilatéral se déduit aisément du test bilatéral.

Test bilatéral I

Hypothèses du test

Vous souhaitez choisir entre les deux hypothèses suivantes :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.}$$

Test bilatéral II

Conditions d'application du test

Il faut que l'échantillon $x_1, \ldots, x_n$ soit des réalisations indépendantes de la variable aléatoire X qui suit une loi normale et que le second échantillon aléatoire $y_1, \ldots, y_{n_2}$ soit aussi des réalisations indépendantes de la variable aléatoire Y qui suit une loi normale. De plus n_1 et n_2 sont pas forcément égaux.

Statistique du test

La variable aléatoire $F = \frac{S^2_{n_1,c}}{S^2_{n_2,c}}$, où $S^2_{n_1,c} = \frac{n_1 S^2_{n_1}}{n_1-1}$ et $S^2_{n_2,c} = \frac{n_2 S^2_{n_2}}{n_2-1}$, suit une loi de Fisher $F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

Test bilatéral III

Décision et conclusion du test

Les valeurs critiques du test de Fisher, notées $c_{\alpha/2,n_1,n_2}$ et $c_{1-\alpha/2,n_1,n_2}$, sont lues dans la table de la loi de Fisher.
Si la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée f_{obs}, n'appartient pas à l'intervalle $]c_{\alpha/2,n_1,n_2}; c_{1-\alpha/2,n_1,n_2}[$, alors le test est significatif. Vous décidez de rejeter $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec un risque de première espèce α.
Si la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée f_{obs}, appartient à $]c_{\alpha/2,n_1,n_2}; c_{1-\alpha/2,n_1,n_2}[$, alors le test n'est pas significatif. Vous décidez de ne pas rejeter $\mathcal{H}_0$ et par conséquent vous décidez de l'accepter en commettant un risque de deuxième espèce β qu'il faudrait évaluer.

Exemple

Cet exemple provient de *Couty-Fredon, Debord, Fredon « Manuel de probabilités et statistique », aux éditions Dunod, 2007.*
Le Coucou est un oiseau qui fait couver ses œufs par des oiseaux d'autres espèces que la sienne, de tailles très différentes.
Une hypothèse a été émise comme quoi le Coucou puisse adapter la taille de ses oeufs à la taille du nid dans lequel il pond.

Exemple

Une étude faite par le biologiste O.H. Latter et publiée sous le titre « The Egg Of Cuculus Canorus : An Enquiry Into The Dimensions Of The Cuckoo'S Ego And The Relation Of The Variations To The Size Of The Eggs Of The Foster-Parent, With Notes On Coloration. » dans la revue *Biometrica, 1902, Volume 1, pages 164-176* sur la taille des œufs déposés dans les nids de petite taille (Roitelet) ou de plus grande taille (Fauvette) a donné les valeurs (en millimètres) figurant ci-dessous. De plus, des études, sur des grands échantillons, montrent que la taille des œufs suit une loi normale.

Suite de l'exemple

1. Dans les nids de Roitelet : 19,5 ; 22,1 ; 21,5 ; 20,9 ; 22,0 ; 21,0 ; 22,3 ; 21,0 ; 20,3 ; 20,9 ; 22,0 ; 22,0 ; 20,8 ; 21,2 ; 21,0.
2. Dans les nids de Fauvette : 22,0 ; 23,9 ; 20,9 ; 23,8 ; 25,0 ; 24,0 ; 23,8 ; 21,7 ; 22,8 ; 23,1 ; 23,5 ; 23,0 ; 23,0 ; 23,1.

Deux questions vous sont alors posées :

1. Pouvez-vous dire, au risque $\alpha = 5\%$, que les deux populations ont la même variance ?
2. Tester également l'hypothèse comme quoi le Coucou adapte la taille de ses oeufs à la taille du nid dans lequel il pond.

C'est à vous !

Traiter cet exemple en T.D.

Sommaire

Test unilatéral I

Remarque

Le test unilatéral se déduit aisément du test bilatéral.

Test bilatéral I

Hypothèses du test

Ce sont les mêmes que précédemment.

Conditions d'application du test

Les effectifs n_1 et n_2 sont tous les deux supérieurs à 30.

Statistique du test

La variable aléatoire $Z = \dfrac{\widehat{\mu}_{n_1} - \widehat{\mu}_{n_2}}{\sqrt{\dfrac{S_{n_1}^2}{n_1 - 1} + \dfrac{S_{n_2}^2}{n_2 - 1}}}$ suit approximativement une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Décision et conclusion du test

La valeur critique du test, notée c_α, est lue dans la table de la loi normale centrée et réduite.
Si la valeur absolue de la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée z_{obs} est supérieure ou égale à c_α, alors le test est significatif. Vous rejetez $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec un risque de première espèce α. Si la valeur absolue de la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée z_{obs} est strictement inférieure à c_α, alors le test n'est pas significatif. Vous conservez $\mathcal{H}_0$ avec un risque de deuxième espèce β.

Sommaire

Introduction

Dans deux populations, un caractère à deux modalités (A et $\overline{A}$) est observé. Chaque individu présente ou non la modalité A. Les fréquences d'apparition de A dans les deux populations sont les nombres inconnus $\pi_{A,1}$ et $\pi_{A,2}$. Quelques notations vont être introduites :

1. $n_{A,1}$ le nombre de personnes de l'échantillon 1 qui présentent la modalité A ;
2. $n_{A,2}$ le nombre de personnes de l'échantillon 2 qui présentent la modalité A ;
3. $n_{\overline{A},1}$ le nombre de personnes de l'échantillon 1 qui ne présentent pas la modalité A ;
4. $n_{\overline{A},2}$ le nombre de personnes de l'échantillon 2 qui ne présentent pas la modalité A ;

Suite des notations

1. $n_{\bullet,1}$ le nombre de personnes présentent dans l'échantillon 1 ;
2. $n_{\bullet,2}$ le nombre de personnes présentent dans l'échantillon 2 ;
3. $n_{A,\bullet}$ le nombre de personnes qui présentent la modalité A dans l'ensemble des deux échantillons ;
4. $n_{\overline{A},\bullet}$ le nombre de personnes qui ne présentent pas la modalité A dans l'ensemble des deux échantillons ;
5. $n = n_{\bullet,1} + n_{\bullet,2}$ la somme des deux effectifs des échantillons.

Test unilatéral I

Remarque

Le test unilatéral se déduit aisément du test bilatéral.

Test bilatéral I

Hypothèses du test

Vous souhaitez choisir entre les deux hypothèses suivantes :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \pi_{A,1} = \pi_{A,2}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \pi_{A,1} \neq \pi_{A,2}.}$$

Conditions d'application du test

Les effectifs n_1 et n_2 peuvent ne pas être égaux.

Test bilatéral II

Statistique du test

La variable aléatoire $n_{A,1}$ suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}\left(n, n_{\bullet,1}, \dfrac{n_{A,\bullet}}{n}\right)$.

Décision et conclusion du test

Il faut raisonner ici avec la p-valeur. Donc il faut avoir recours pour ce test à une table spécifique.

Remarque

Vous pouvez trouver dans la littérature une variation de ce test, qui va être présentée ci-dessous, avec cette fois-ci d'autres conditions d'application et une autre statistique que celle présentée précédemment. Cette variation utilise l'approximation de la loi hypergéométrique par une loi normale. Cette approximation a longtemps été utilisée mais avec certains logiciels comme `R`, il est préférable d'avoir recours au test exact de Fisher présenté ci-dessus.

Remarque

Le test unilatéral se déduit aisément du test bilatéral.

Test bilatéral I

Hypothèses du test

Ce sont les mêmes que précédemment.

Conditions d'application du test

Les effectifs n_1 et n_2 ne sont pas forcément égaux. De plus, chaque case du tableau de contingence doit présenter un effectif théorique supérieur ou égal à 5.

Test bilatéral II

Statistique du test

La variable aléatoire $Z = \dfrac{n_{A,1} - \dfrac{n_{A,\bullet} \times n_{\bullet,1}}{n}}{\sqrt{\dfrac{n_{\bullet,1} \times n_{\bullet,2} \times n_{A,\bullet} \times n_{\overline{A},\bullet}}{n^2(n-1)}}}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Test bilatéral III

Décision et conclusion du test

La valeur critique du test, notée c_α, est lue dans la table de la loi normale centrée et réduite. Si la valeur absolue de la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée z_{obs}, est supérieure ou égale à c_α, alors le test est significatif. Vous rejetez $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec un risque de première espèce $\alpha = 5\%$. Si la valeur absolue de la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée z_{obs}, est strictement inférieure ou égale à c_α, alors le test n'est pas significatif. Vous conservez $\mathcal{H}_0$ avec un risque β.

Si l'effectif des deux échantillons prélevés est inférieur à 10% de l'effectif total de chaque population, il est possible de considérer que le tirage a lieu sans remise et d'utiliser les résultats précédents.

Sommaire

Définition

Deux populations sont appariées (associées par paires) lorsque chaque valeur $x_{i,1}$ est associée à une valeur de $x_{i,2}$.
Soit μ_1 la moyenne dans la première population et μ_2 la moyenne dans la seconde population.
Soit D_i la différence entre $X_{i,1}$ et $X_{i,2}$ et D la variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu_D, \sigma_D)$.

Remarque

Il est équivalent de chercher à savoir si $\mu_1 = \mu_2$ ou de déterminer si $\mu_D = \mu_1 - \mu_2 = 0$.

Remarque

Le test unilatéral se déduit aisément du test bilatéral.

Test bilatéral I

Hypothèses du test

Vous souhaitez choisir entre les deux hypothèses

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ (ou } \mu_D = 0)}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \text{ (ou } \mu_D \neq 0).}$$

Conditions d'application du test

Il faut que l' échantillon $d_1, \ldots, d_n$ soit des réalisations indépendantes de la variable aléatoire D qui suit une loi normale.

Statistique du test

La variable aléatoire $T_{n-1} = \frac{\widehat{\mu}_D}{S_{D,c}/\sqrt{n}}$ suit une loi de Student $t(n-1)$, où $\widehat{\mu}_D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i$ et $S^2_{D,c} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(D_i - \widehat{\mu}_D\right)^2$.

Décision et conclusion du test

La valeur critique du test, notée c_α, est lue dans une table de la loi de Student. Si la valeur absolue de la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée $t_{n-1,obs}$ est supérieure ou égale à c_α, alors le test est significatif. Vous rejetez $\mathcal{H}_0$ et vous décidez que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec un risque de première espèce α. Si la valeur absolue de la valeur de la statistique calculée sur l'échantillon, notée $t_{n-1,obs}$ est strictement inférieure à c_α, alors le test n'est pas significatif. Vous conservez $\mathcal{H}_0$ avec un risque d'erreur de deuxième espèce β.

Traitement pour la pression artérielle I

Exemple

D'après Couty-Fredon, Debord, Fredon, « Mini Manuel de Probabilités et Statistique », aux éditions Dunod, 2007.

Chez un groupe de 10 sujets, les effets d'un traitement destiné à diminuer la pression artérielle ont été expérimentés. Les résultats (valeur de la tension artérielle systolique en cmHg) ont été relevés sur les 10 sujets et sont présentés dans le tableau ci-dessous. De plus, des études sur des grands échantillons, ont montré que la valeur de la tension artérielle suit une loi normale.

Suite de l'exemple

Sujet n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Avant traitement	15	18	17	20	21	18	17	15	19	16
Après traitement	12	16	17	18	17	15	18	14	16	18

Le traitement a-t-il une action significative, au risque d'erreur $\alpha = 5\%$?

Sommaire

Lorsque l'effectif des deux échantillons est important, supérieur ou égal à 30, il est possible d'utiliser le test précédent sans que l'hypothèse de normalité soit vérifiée.