T. D. n$^{\text{o}}$ 6
Tests de comparaisons pour une population

Exercice 1. Détermination de la vitesse de la lumière. D'après le livre « Mathématiques pour les sciences de l'ingénieur ». Frédéric Bertrand et Myriam Maumy-Bertrand.

Albert A. Michelson et Edward Morley ont mesuré la vitesse de la lumière dans l'air entre le 5 juin 1879 et le 2 juillet 1879. Ils ont réalisé cinq expériences comportant chacune vingt mesures. La réponse expérimentale est la vitesse de la lumière dans l'air exprimée en km/s à laquelle il a été soustrait la valeur de 299000 km/s. Les résultats obtenus ont été reportés dans le tableau ci-après. La valeur de la vitesse de la lumière dans l'air communément acceptée de nos jours est de 299734,5 km/s.

850	740	900	1070	930	850	950	980	980	880	1000	980	930	650	760
810	1000	1000	960	960	960	940	960	940	880	800	850	880	900	840
830	790	810	880	880	830	800	790	760	800	880	880	880	860	720
720	620	860	970	950	880	910	850	870	840	840	850	840	840	840
890	810	810	820	800	770	760	740	750	760	910	920	890	860	880
720	840	850	850	780	890	840	780	810	760	810	790	810	820	850
870	870	810	740	810	940	950	800	810	870					

Source : A.J. Weekes, A Genstat Primer, London : Edward Arnold, 1986.

a) Cette série de résultats constitue-t-elle une population ? Un échantillon ? Justifier votre choix.

b) Les mesures de la vitesse de la lumière réalisées par Michelson et Morley, reproduites ci-dessus, sont-elles compatibles avec la valeur de 299734,5 km/s qui est la vitesse de la lumière dans l'air communément acceptée de nos jours au seuil $\alpha = 5\%$?

Exercice 2. Contrôle des teneurs en nitrates d'eaux de sources. D'après le livre de Dagnélie.

Nous avons observé les teneurs en nitrates suivantes, en ce qui concerne les eaux de 30 sources d'une région donnée (en milligrammes de NO_3 par litre). Ces données proviennent de Demarets, 1992. Les données sont présentées dans le tableau suivant :

37	21	0	19	1	5	0	13	1	20
34	19	17	74	28	34	61	15	35	55
28	10	69	48	63	8	18	34	18	90

Nous nous posons la question de savoir si, en moyenne, les teneurs en nitrates des eaux de sources de l'ensemble de la région considérée ne dépassent pas un seuil ou une norme de 25 mg/l, au risque $\alpha = 5\%$.

Exercice 3. Bientôt les fêtes de fin d'année...Le chocolat

Une machine est réglée pour fabriquer des plaques de chocolats d'une masse « moyenne » de 250g. Soucieux de ce problème, le service de contrôle de qualité demande une vérification de la machine. La masse de 30 plaques de chocolats est observée. Nous obtenons les mesures suivantes :

256	245	253	250	255	251	248	247	252	249
254	243	255	248	257	249	250	245	254	247
252	247	251	252	253	253	252	249	250	245

Quelle est votre conclusion ? Pour répondre à la question, expliquer votre démarche en rappelant le contexte du test que vous allez utiliser.

Exercice 4. Gaz nocif. D'après le livre « Mathématiques pour les sciences de l'ingénieur ». Frédéric Bertrand et Myriam Maumy-Bertrand.

Dans l'atmosphère, le taux d'un gaz nocif, pour un volume donné, suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2. Nous effectuons n prélèvements conduisant aux valeurs $x_1, \ldots, x_n$.

1. Nous savons que $\sigma^2 = 100$ et que sur $n = 10$ prélèvements, nous avons trouvé une valeur moyenne de 52.
   a. Pouvons-nous conclure, au risque $\alpha = 5\%$, que l'espérance μ est inférieure à 50, qui est le seuil tolérable admis ?
   b. Pouvons-nous donner cette conclusion au risque $\alpha = 1\%$ et au risque $\alpha = 10\%$?

2. Nous ne connaissons pas la variance σ^2 de la population, mais nous avons effectué 200 prélèvements. Nous trouvons une moyenne empirique égale à 51 et une variance empirique corrigée égale à 100.
   Pouvons-nous conclure, au risque $\alpha = 5\%$, que l'espérance μ est inférieure à 50, qui est le seuil tolérable admis ?

Exercice 5. D'après le livre « Mathématiques pour les Sciences de l'Ingénieur ». Frédéric Bertrand et Myriam Maumy-Bertrand.

Nous avons prélevé, au hasard, dans une population dont la variable qui nous intéresse suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ, un échantillon de taille $n = 30$. La moyenne et la variance calculées sur cet échantillon sont respectivement $\widehat{\mu}_{30}(obs) = 4$ et $S^2_{30,c}(obs) = 6$.

1. Calculer une estimation sans biais de σ^2 et son intervalle de confiance à 95% sans faire d'hypothèse sur la valeur de μ.
2. Tester, au risque $\alpha = 5\%$, l'hypothèse $\mathcal{H}_0 : \sigma^2 = 4$.
3. Calculer une estimation sans biais de μ et son intervalle de confiance à 95% sans faire d'hypothèse sur la valeur de σ^2.
4. En admettant σ^2 égale à 4, tester, au risque $\alpha = 5\%$, l'hypothèse $\mathcal{H}_0 : \mu = 3$.
5. Tester, au risque $\alpha = 5\%$, l'hypothèse $\mathcal{H}_0 : \mu = 3$ sans faire d'hypothèse sur la valeur de σ^2.