Construction et analyse de plans d'expérience sphériques isovariants à l'aide d'outils combinatoires et algébriques

FRÉDÉRIC BERTRAND[1]

[1]IRMA, Université Louis Pasteur
Strasbourg, France
Courriel : fbertran@math.u-strasbg.fr

JDS07 – Angers – 11 juin 2007

Sommaire

Motivations

Problématique statistique
- Admissibilité et isovariance
- Isovariance et surfaces de réponses
- Confusions d'effets

Plans sphériques de force t
- Définition et premières propriétés des plans sphériques
- Existence de plans sphériques
- Estimabilité

Bases de Gröbner

Exemple d'application

Motivations

Le travail réalisé porte sur l'utilisation combinée **d'outils combinatoires et algébriques** pour la construction et l'analyse de plans d'expérience.

Les principaux avantages de cette approche sont sa grande généralité, son automatisation et **l'obtention des coordonnées exactes** des points du plan ainsi que la détermination complète des confusions d'effets.

Nous intéresserons ici plus particulièrement à la méthodologie des surfaces de réponse, à laquelle le lecteur trouvera une introduction dans Myers et Montgomery (2002), et plus spécifiquement au cas des plans sphériques et à la **propriété d'isovariance statistique**, introduite par Box et Hunter (1957).

Les plans dont les points supports sont situés sur une sphère interviennent également, entre autres, dans les domaines suivants :

1. la régression sphérique,
2. la reconnaissance de formes,
3. la géostatistique
4. l'analyse des aberrations optiques

Actuellement la construction de plans d'expérience euclidiens repose généralement sur la **recherche numérique des coordonnées des points** du plan.

Si cette résolution numérique peut, de prime abord, sembler satisfaisante pour l'expérimentateur, il s'avère qu'elle souffre de certains défauts.

Elle rend à la fois impossible l'obtention d'une classification des plans à une isométrie orthogonale près et **l'analyse exacte des confusions d'effets** qui apparaissent nécessairement lorsque nous nous intéressons à des plans euclidiens de petite taille.

Or une connaissance précise des confusions d'effets est importante pour le planificateur et rend en particulier possible **l'ajout de termes complémentaires** à des modèles polynomiaux qui ne modélisent pas la réponse avec suffisamment de précision.

Sommaire

Motivations

Problématique statistique
- Admissibilité et isovariance
- Isovariance et surfaces de réponses
- Confusions d'effets

Plans sphériques de force t
- Définition et premières propriétés des plans sphériques
- Existence de plans sphériques
- Estimabilité

Bases de Gröbner

Exemple d'application

Problématique statistique

Définition

Un plan ξ_0 est dit admissible s'il n'existe pas de plan ξ tel que :

$$M(\xi_0) \leqslant M(\xi) \quad et \quad M(\xi_0) \neq M(\xi), \tag{2.1}$$

où $M(\xi_0)$ et $M(\xi)$ sont les matrices des moments respectivement du plan ξ_0 et du plan ξ.

La propriété d'admissibilité d'un plan est uniquement associée à ses points support et ne dépend donc pas des poids du plan.

Nous ne considérerons donc que des plans pour lesquels les poids sont uniformes et sont par conséquent des plans exacts.

Admissibilité, invariance et modèles polynomiaux

Nous considérons :

1. un modèle de régression polynomial A de degré d,
2. un domaine expérimental compact.

Proposition

La matrice des moments d'un plan ξ de points supports $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ est :

$$M(\xi) = (\mu_{\alpha+\beta})_{\alpha,\beta\in A}\,, \tag{2.2}$$

où

$$\mu_{\alpha}(\xi) = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{x}_i{}^{\alpha}\xi(\boldsymbol{x}_i), \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^{v} \text{ et } |\alpha| \leqslant 2d. \tag{2.3}$$

Définition

Si un plan ξ est admissible pour un modèle de régression polynomial A de degré d il est dit A−admissible.

Définition

Un plan est dit isovariant pour un modèle de régression si pour tout $g \in \mathcal{O}_n$, $M(\xi^g) = M(\xi)$.

Lemme

Nous considérons un modèle de régression polynomial complet de degré d, A_d, et un plan ξ. Alors, il existe un plan isovariant $\widetilde{\xi}$ qui soit A_d-admissible et tel que :

$$M(\widetilde{\xi}) \geqslant M(\xi). \tag{2.4}$$

Nous pouvons caractériser les plans A_d-admissibles pour un domaine χ compact. Le cas unidimensionnel a été traité en 1959 par Kiefer.

Théorème

Soient $v = 1$ et $\chi = [a, b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Un plan ξ est A_d-admissible si et seulement si :

$$\text{Card}(\text{supp}(\xi) \cap]a, b[) \leqslant d - 1. \tag{2.5}$$

Théorème

Soit $v \geqslant 1$, et $\mathcal{S} \subset \chi$ un segment non dégénéré inclus dans le domaine expérimental. Si un plan ξ est A_d-admissible :

$$\mathrm{Card}(\mathrm{supp}(\xi) \cap \mathrm{ri}(\mathcal{S})) \leqslant d - 1, \tag{2.6}$$

où $\mathrm{ri}(\mathcal{S})$ est l'intérieur relatif du segment $\mathcal{S}$.

Pour obtenir des résultats plus précis nous utilisons le fait que le domaine expérimental que nous considérons est une boule et nous faisons l'hypothèse supplémentaire que le plan est isovariant.

Définition

Le domaine expérimental $\mathcal{B}_r$ est une boule de rayon r centrée en $\mathbf{0}$ *:*

$$\mathcal{B}_r = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_v)' \in \mathbb{R}^v, \|\boldsymbol{x}\| \leqslant r \right\}, \tag{2.7}$$

où $r \geqslant 0$.

La frontière de $\mathcal{B}_r$ est $\partial\mathcal{B}_r$, également notée $\mathcal{S}_r$:

$$\partial\mathcal{B}_r = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_v)' \in \mathbb{R}^v, \|\boldsymbol{x}\| = r \right\}. \tag{2.8}$$

Définition

Soit ξ un plan isovariant sur la boule $\mathcal{B}_r$. La multiplicité $m_\xi(\rho)$ d'un rayon $\rho \in R(\xi)$ est égale à :

$$m_\xi(\rho) = \begin{cases} 0, & si\ \rho = r \\ 1, & si\ 0 < \rho < r \\ \frac{1}{2}, & si\ \rho = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Définition

Soit ξ un plan isovariant sur la boule $\mathcal{B}_r$. Le cardinal effectif γ_ξ de $R(\xi)$ est égal à :

$$\gamma_\xi = \sum_{\rho \in R(\xi)} m_\xi(\rho). \tag{2.10}$$

Théorème

Soit un modèle polynomial complet d'ordre $d \geqslant 1$ sur la boule $\mathcal{B}_r$. Si le plan ξ est isovariant et A_d-admissible alors :

$$\gamma_{\xi} \leqslant \frac{d-1}{2}. \tag{2.11}$$

Réciproquement, si ξ est un plan, non nécessairement isovariant, tel que :

$$\gamma_{\xi} \leqslant \frac{d-1}{2}, \tag{2.12}$$

alors il est A_d-admissible.

Corollaire

1. *En particulier si $d = 1$, alors $\gamma_\xi = 0$. Ainsi le support d'un plan isovariant et A_1-admissible est inclus dans la frontière de la boule $\mathcal{B}_r$.*
   Réciproquement tout plan dont le support est inclus dans la sphère de rayon r est A_1-admissible.
2. *En particulier si $d = 2$, alors $\gamma_\xi \leqslant 1/2$. Ainsi le support d'un plan isovariant et A_2-admissible est :*
   - *soit inclus dans la frontière de la boule $\mathcal{B}_r$,*
   - *soit dans l'ensemble formé par l'union de cette frontière et de l'origine $\mathbf{0}$.*

   Réciproquement si un plan vérifie l'une des conditions ci-dessus, il est A_2-admissible.

Isovariance et surfaces de réponses

La notion d'isovariance est également recherchée dans le domaine des surfaces de réponse.

En effet, un résultat de Box et Draper, 1957, montre que l'invariance de la matrice des moments est alors équivalente au fait que la variance de l'estimateur de la réponse moyenne soit constante sur les sphères centrées en l'origine du repère.

Ceci se traduit concrètement par le fait que la qualité de la prédiction de la réponse moyenne de la surface de réponse est semblable à une distance fixée de l'origine en termes d'intervalles de confiances par exemple.

Confusions d'effets

La construction d'un dispositif isovariant n'a d'intérêt que s'il peut être utilisé efficacement. Pour cela il faut être à même de pouvoir déterminer quels sont les modèles, dont tous les paramètres sont estimables, qui peuvent être utilisés pour en faire l'analyse.

La structure particulière des dispositifs dont **les points sont nécessairement situés sur la sphère complique singulièrement** ce moment de l'étude dès que le modèle polynomial que nous utilisons est de degré supérieur ou égal à trois puisque de nombreuses confusions d'effets apparaissent alors.

Sommaire

Motivations

Problématique statistique
- Admissibilité et isovariance
- Isovariance et surfaces de réponses
- Confusions d'effets

Plans sphériques de force t
- Définition et premières propriétés des plans sphériques
- Existence de plans sphériques
- Estimabilité

Bases de Gröbner

Exemple d'application

Définition

Soient $\boldsymbol{X}$ *un sous-ensemble fini de* S^v *et* t *un entier positif.* $\boldsymbol{X}$ *est un* $t-$*plan sphérique si l'égalité suivante est vérifiée :*

$$\int_{S^v} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{X}|} \sum_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}} f(\boldsymbol{x}), \tag{3.1}$$

quel que soit le polynôme f *de degré inférieur ou égal à* t *et où la mesure* μ *est l'unique mesure de probabilité sur la sphère* S^v *invariante par l'action du groupe orthogonal* $\mathcal{O}_v$.

Premières propriétés

Nous commençons par donner deux propriétés élémentaires des plans sphériques.

Proposition

Si $\boldsymbol{X}$ est un $t-$plan sphérique dans $\mathbb{R}^v$ alors, pour tout $0 \leqslant s \leqslant t$, $\boldsymbol{X}$ est un $s-$plan sphérique dans $\mathbb{R}^v$.

Proposition

Si $\boldsymbol{X}$ est un $t-$plan sphérique dans $\mathbb{R}^v$ alors il en va de même de $\sigma(\boldsymbol{X})$, où σ est un élément de $\mathcal{O}_v$.

Proposition

*Si $\boldsymbol{X_1}$ et $\boldsymbol{X_2}$ sont deux $t-$plans sphériques **disjoints** de $\mathbb{R}^v$ alors $\boldsymbol{X_1} \cup \boldsymbol{X_2}$ est un $t-$plan sphérique de $\mathbb{R}^v$.*

Proposition

Soit v un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si nous disposons de l plans sphériques de force t dans $\mathbb{R}^v$ dont les cardinaux sont des entiers consécutifs, de r_0 à $r_0 + l - 1$, et que $l \geqslant r_0$, alors il existe des plans sphériques de force t pour n'importe quel cardinal supérieur ou égal à r_0.

Plans isovariants et plans sphériques

Le théorème suivant permet de mettre en rapport les plans ξ isovariants et les plans sphériques.

Théorème

Si un plan, pour lequel tous les poids sont égaux, a son support inclus dans une sphère de rayon 1 *et que le modèle est* ***isovariant pour modèle polynomial de degré d****, alors les* ***points support du plan forment un*** $2d-$***plan sphérique****.*

Réciproquement tout plan dont les points support forment ***un plan sphérique de force*** $2d$ *est un* ***plan isovariant pour modèle polynomial de degré d*** *si nous choisissons tous les poids des points support du plan égaux.*

L'intérêt majeur de ce théorème est de faire le lien entre la problématique statistique et les nombreux travaux existant dans plusieurs domaines des mathématiques et concernant les plans sphériques.
Ces derniers sont utilisés dans :

1. la théorie des codes,
2. en combinatoire,
3. pour la classification des réseaux,
4. en l'analyse numérique comme formules de cubature sur la sphère

Plusieurs directions de recherche ont été et sont toujours poursuivies :

1. généralisation de la notion de plan sphérique à d'autres espaces que $\mathbb{R}^n$
2. existence et construction explicite de plans d'une force et d'un cardinal donné
3. lien entre les représentations de sous-groupes du groupe orthogonal et force du plan
4. détermination du nombre minimal de points nécessaire à obtenir une force donnée, du nombre minimal de points à partir duquel il existe toujours un plan sphérique d'une force donnée.

Existence de plans sphériques

Le résultat suivant est très général et a été obtenu en 1984 par Seymour et Zaslavsky.

Théorème

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace topologique connexe par arcs muni d'une mesure μ finie, positive et telle que tout ouvert non vide soit de mesure non nulle. Soient $f_1, \ldots, f_m : \Omega \to \mathbb{R}^p$ des fonctions continues et intégrables sur Ω. Il existe un sous-ensemble fini de Ω tel que

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1,\ldots,m} f_j(x_i) = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f_j(t) d\mu, \quad \forall j \in [|1, \ldots, m|] .$$

Le cardinal de X peut être n'importe quel entier naturel sauf un nombre fini d'entre eux. De plus nous pouvons choisir X de telle sorte que les vecteurs $(f_1(x), \ldots, f_m(x))$, pour $x \in X$, soient tous distincts.

Remarque

Il s'agit d'un résultat d'existence non constructive.

De nombreux auteurs ont proposé des constructions de plans de force t. Toutefois, seules des **études numériques** ont permis de déterminer quelle était la force maximale qu'il était possible d'obtenir avec un plan de cardinal donné à l'avance.

Isovariance et $D-$ et $I-$efficacité

Nous considérons un plan de cardinal r, analysé à l'aide d'un modèle polynomial complet de degré 2, dont le support est l'union :

1. de B points appartenant à la surface de la boule unité de $\mathbb{R}^v$
2. de C répétitions du point au centre du domaine expérimental.

Théorème

Pour des valeurs données de r, v, B et C, la ***I−efficacité*** *et la* ***D−efficacité*** *d'un plan* ***sont maximisées*** *si les points de la* ***partie sphérique*** *du plan peuvent être placés de telle sorte qu'ils forment un* **4−*plan sphérique***.

Cas de la dimension 2

Proposition

- *L'ensemble des racines $r-$èmes de l'unité est un $t-$plan sphérique à r éléments pour tout $t < r$.*
- *Les plans sphériques de force $(r-1)$ à r éléments sont les sommets des polygones réguliers à r côtés.*

Théorème

Soit $\boldsymbol{X}$ un plan sphérique de force t dans $\mathbb{R}^2$.

- *Si $t+1 \leqslant |\boldsymbol{X}| \leqslant 2t+1$, alors $\boldsymbol{X}$ est un polygone régulier.*
- *Si $|\boldsymbol{X}| = 2t+2$, alors $\boldsymbol{X}$ est la réunion de deux polygones réguliers à $t+1$ côtés. En particulier $\boldsymbol{X}$ peut être le polygone régulier à $2t+2$ côtés.*
- *Il existe une infinité de classes d'équivalence, modulo le groupe orthogonal $\mathcal{O}_2$, de t plans sphériques qui ne sont pas des unions de polygones réguliers si $|\boldsymbol{X}| \geqslant 2t+3$.*

Dimension 3

Le cas de la dimension 2 est exceptionnel et permet la construction de plans sphériques de n'importe quel cardinal $n \geqslant 1$ qui sont alors de force $n-1$.

En dimension 3, il n'y a que 5 polyèdres réguliers convexes :

- L'icosaèdre est un $5-$plan de cardinal minimal.
- L'octaèdre, le cube et le tétraèdre ne sont pas des $4-$plans sphériques mais respectivement des 3, 3 et 2-plans sphériques.
- Le dodécaèdre est un $5-$plan.

Dimension 4

En dimension 4, il n'y a que 6 polyèdres réguliers convexes.

$\{5,3,3\}$ et $\{3,3,5\}$, ont plus d'une centaine de sommets ce qui les rend inutilisable comme support d'un plan.

Un modèle de degré 2 dans $\mathbb{R}^4$ comporte 14 termes non constants.
Si nous cherchons un dispositif qui soit isovariant analysé avec un modèle de degré 2, la partie sphérique du plan doit comporter au moins 14 points ce qui ne laisse, après avoir éliminé $\{5,3,3\}$ et $\{3,3,5\}$, que $\{4,3,3\}$ et $\{3,4,3\}$ qui comportent respectivement 16 et 24 sommets.

Les degrés des invariants d'un fondamental d'invariants associé au groupe de symétries de $\{4, 3, 3\}$ et $\{3, 4, 3\}$ sont respectivement 2, 4, 6, 8 et 2, 6, 8, 12.

Seul $\{3, 4, 3\}$ est un plan sphérique de force supérieure ou égale à 5, sa force est égale à 5 et de ce fait il s'agit du support d'un dispositif isovariant pour un modèle de degré 2.

Dimension $n \geqslant 5$

Enfin en dimension n supérieure ou égale à 5, il ne reste que les trois familles infinies associées au $n-$simplexe, au $n-$hyperoctaèdre et au $n-$hypercube.

Ces trois familles de polytopes réguliers sont associées à des plans qui ne sont isovariants que pour un modèle polynomial complet de degré 1.

Nous ne pouvons nous contenter de proposer des dispositifs expérimentaux dont le support est un polytope régulier.
D'où l'étude des plans dont le support est :

1. un polytope semi-régulier
2. une union d'orbites de points par des groupes de Coxeter.

Les systèmes d'équations polynomiales à résoudre lors de cette phase de construction peuvent être traités avec les bases de Gröbner.

Estimabilité

L'utilisation des plans sphériques en statistique pose le problème de l'estimabilité, particulièrement important ici puisque :

1. le domaine expérimental est une boule,
2. les points support du plan sont inclus dans une sphère.

Pour déterminer l'idéal des confusions d'effets, il est possbile d'utiliser les bases de Gröbner à condition de connaître **exactement les coordonnées** des points du plan.

Il sera alors également possible de savoir **quel point ajouter au plan pour éliminer une confusion d'effet** à l'aide d'un essai supplémentaire.

Théorème

Il existe pour $N \in \{13, 15\} \cup [|17, +\infty[|$, *des dispositifs expérimentaux de cardinal N qui, analysés avec un modèle polynomial de degré 2, sont isovariants.*
De plus ces dispositifs présentent la particularité suivante : le support de chacun des plans est l'union d'un plan sphérique et d'un point au centre du domaine expérimental.
Dans tous les cas, ils peuvent ne comporter aucune répétition dans leur partie shpérique.
Pour chacune des valeurs de N suivantes 13, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 31, 33, 37, 39, 49, 55, 57, 61, 73, 81, les coordonnées exactes de ces plans sont connues et ces plans ne sont pas construits comme l'union de deux plans de cardinal inférieur.

Sommaire

Motivations

Problématique statistique
- Admissibilité et isovariance
- Isovariance et surfaces de réponses
- Confusions d'effets

Plans sphériques de force t
- Définition et premières propriétés des plans sphériques
- Existence de plans sphériques
- Estimabilité

Bases de Gröbner

Exemple d'application

Bases de Gröbner

L'intérêt majeur des bases de Gröbner est de permettre une **résolution algorithmique** de nombreux problèmes de **géométrie algébrique et d'algèbre commutative**.

L'utilisation des bases de Gröbner dans le domaine de la planification expérimentale a déjà été théorisée par Pistone, Riccomagno et Wynn (2000).

Ces méthodes n'avaient pas encore été appliquées à la recherche de dispositifs isovariants.

Il n'existait pas de procédure permettant de mener à bien une telle analyse.

Il a donc fallu réaliser **plusieurs programmes en Maple**.

La diversité des algorithmes utilisés provient du fait que les bases de Gröbner sont d'un intérêt multiple.

Notre préoccupation principale était d'évaluer **leur temps d'exécution**, celui-ci devant être **suffisamment court** pour présenter un intérêt pratique et majeur pour l'expérimentateur.

1. En premier lieu, les bases de Gröbner servent à déterminer la variété des plans admissibles sous certaines contraintes, ici l'isovariance. Nous calculons les **coordonnées exactes des points** paramétrant les orbites.
2. En second lieu, les bases de Gröbner permettent de résoudre non seulement le problème de **l'analyse des confusions d'effets** mais aussi de connaître les **paramètres supplémentaires** que l'on pourra estimer **en ajoutant un ou plusieurs points précis au dispositif**. Ce dernier point repose sur l'utilisation de l'algorithme de Marinari, Möller, Mora (1993) particulièrement adapté à la recherche de bases de Gröbner pour des variétés algébriques de dimension nulle.

Sommaire

Motivations

Problématique statistique
- Admissibilité et isovariance
- Isovariance et surfaces de réponses
- Confusions d'effets

Plans sphériques de force t
- Définition et premières propriétés des plans sphériques
- Existence de plans sphériques
- Estimabilité

Bases de Gröbner

Exemple d'application

Exemple d'application

L'étude approfondie de l'article de Hardin et Sloane (1996) a permis de valider la méthode proposée ci-dessus et le bon fonctionnement de l'implémentation pratique tout en obtenant des résultats supérieurs et supplémentaires à ceux obtenus originalement, en particulier en ce qui concerne la question de l'existence de dispositifs jusqu'alors conjecturée à l'aide de calculs numériques. Nous présentons ici un exemple type des résultats obtenus.

Nous cherchons un $5-$plan sphérique combinatoire de cardinal 12 construit comme l'union des points $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$ et de l'ensemble des points obtenus comme orbite du point de coordonnées $(\alpha,0,\beta)$, avec la condition $\alpha^2+\beta^2=1$, par le groupe de Coxeter $[3,5]$, c'est-à-dire le groupe des symétries de l'icosaèdre. L'analyse des défauts d'isovariance implique que : $5\alpha^2-10\beta^2=2$. Nous retrouvons le plan dont le support est l'icosaèdre.
Pour ce plan il n'y pas de confusion d'effets entre les termes de chacun des deux modèles ci-dessous :

- $\mathrm{EstSet}_{tdeg} := \{1, z, y, x, z^2, yz, xz, y^2, yx, z^3, y^2z, xyz\}$, obtenu pour l'ordre du degré total associé à la condition $z > y > x$,
- $\mathrm{EstSet}_{plex} := \{1, z, z^2, z^3, y, yz, y^2, y^2z, y^3, y^3z, y^4, y^4z\}$, obtenu pour l'ordre lexicographique initialisé par la condition $z > y > x$.

Merci pour votre attention.

Box, G. E. P. and Hunter, J. S. (1957), Multifactor Experimental Designs for Exploring Response Surfaces, *The Annals of Mathematical Statistics*, 28, 195–241.

Collombier, D. (2003), *Cours de DEA*, Université Louis Pasteur, Strasbourg.

Cox, D., Little, J. and O'Shea, D. (1997), *Ideals , varieties and algorithms*, Springer, New York.

Coxeter, H. S. M., Moser, W. O. J. (1980), *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer-Verlag, Heidelberg.

Delsarte, P., Goethals, J.M. and Seidel, J.J. (1977), Spherical codes and designs, *Geometriae Dedicata*, 6, 363–388.

Hardin, R.H. and Sloane, N.J.A. (1996), McLaren's Improved Snub Cube and Other New Spherical Designs in

Three Dimensions, *Discrete and Computational Geometry*, 15, 429–441.

Kreuzer, M. and Robbiano, L. (2000), *Computational Commutative Algebra 1*, Springer, New York.

Marinari, M. G., Möller, H. M. and Mora, T. (1993), Gröbner bases of ideals defined by functionals with an application to ideals of projective points. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing* 4, 103–145.

Myers, R. H. and Montgomery D. C. (2002), *Response surface Methodology*, John Wiley & Sons, New York.

Pistone, G., Riccomagno, E. and Wynn, H. P. (2001), *Algebraic Statistics*, Chapman & Hall.

Seymour, P. D. and Zaslavsky, T. (1984), Averaging sets : a generalization of mean values and spherical designs, *Advances in Mathematics*, 52, 213–240.